Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GAUSS

09

Correction

La suite (u_n) est définie par récurrence : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4u_n + 1 \end{cases}$.

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Pour étudier une telle suite, il est usuel d'introduire une suite auxiliaire qui est, quant à elle, purement géométrique. L'exercice n'échappe pas à cette règle.

1.a. Calculons les trois premiers termes de la suite :

Successivement :

$$u_1 = 4u_0 + 1 = 4 \times 0 + 1 = 1$$
$$u_2 = 4u_1 + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5$$
$$u_3 = 4u_2 + 1 = 4 \times 5 + 1 = 21$$

1.b. Justifions que u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux :

Rappelons le théorème de Bézout : deux entiers relatifs *a* et *b* sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs *x* et *y* vérifiant la relation : $xa + yb = 1$

Compte tenu de la relation de récurrence permettant de construire (u_n), pour tout entier naturel *n* les deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} sont liés par la relation $u_{n+1} - 4u_n = 1$.

Il existe donc deux entiers *x* et *y*, les entiers $x = 1$ et $y = -4$, tels que pour tout entier naturel *n* :

$$x \times u_n + y \times u_{n+1} = 1$$

D'après le théorème de Bézout, pour tout entier naturel *n*, les entiers u_n et u_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.

2.a. Montrons que (v_n) est une suite géométrique :

NB. La suite auxiliaire (v_n) est définie par l'expression du terme de rang n de cette suite en fonction de son homologue de la suite (u_n) : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

En particulier, le premier terme de cette suite est : $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Notons que réciproquement nous disposons de la relation $u_n = v_n - \frac{1}{3}$, exprimant le terme de rang n de (u_n) en fonction de son homologue de la suite (v_n).

Déterminons une relation de récurrence entre deux termes consécutifs de cette suite (v_n).

Pour tout entier naturel n :

- Commençons par exprimer le terme de rang $n+1$ en fonction de son homologue de la suite (u_n). D'après la définition de la suite (v_n) :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3}$$

- Appliquons la relation de récurrence liant deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$v_{n+1} = (4u_n + 1) + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3}$$

- Exprimons inversement u_n en fonction de son homologue de la suite (v_n) :

$$v_{n+1} = 4\left(v_n - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} = 4v_n - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4v_n$$

Concluons : $v_{n+1} = 4v_n$

Nous avons obtenu une relation de récurrence de la forme $v_{n+1} = q \times v_n$ caractérisant une suite géométrique.

La suite (v_n) est la suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$

2.b. Déduisons-en l'expression explicite de v_n puis celle de u_n :

NB. Nous savons que l'expression explicite du terme de rang n d'une suite géométrique de terme initial v_0 et de raison q est : $v_n = v_0 \times q^n$.

Dans le présent contexte, la suite (v_n) a pour raison 4 et pour premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$

En conséquence, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{3} \times 4^n$$

Nous en déduisons que pour tout entier naturel *n* :

$$u_n = v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times (4^n - 1)$$

Retenons l'expression explicite suivante :

$$\boldsymbol{u_n = \frac{1}{3} \times (4^n - 1)}$$

3. Calculons le PGCD de u_n et u_{n+1} :

Rappelons une caractérisation du PGCD de deux entiers non nuls *a* et *b*, parmi leurs diviseurs positifs communs :

Soit *d* un diviseur positif commun à *a* et *b*. Il existe donc deux entiers *a'* et *b'* tels que : $\begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases}$.

Théorème[1] : *d* est le PGCD de *a* et de *b* si et seulement si les entiers *a'* et *b'* sont **premiers entre eux.**

Soit *n* un entier naturel quelconque.

D'après l'expression explicite trouvée dans la question précédente :

$$\begin{cases} 4^n - 1 = 3 \times u_n \\ 4^{n+1} - 1 = 3 \times u_{n+1} \end{cases}$$

Ces relations montrent que 3 est un diviseur commun à u_n et u_{n+1}.

D'après le résultat de la **question 1.b**, nous savons que, pour tout entier naturel *n*, les entiers u_n et u_{n+1} sont des entiers premiers entre eux. Nous pouvons appliquer la caractérisation du PGCD ci-dessus avec $d = 3$ et : $\begin{cases} a = 4^n - 1 \,;\; a' = u_n \\ b = 4^{n+1} - 1 \,;\; b' = u_{n+1} \end{cases}$.

Quel que soit l'entier naturel *n*, Le PGCD de u_n et u_{n+1} est égal à 3.

[1] Démonstration du théorème :

- Si les entiers *a'* et *b'* sont premiers entre eux, il existe d'après le théorème de Bézout deux entiers *x* et *y* tels que $xa' + yb' = 1$. Alors : $xa + yb = xda' + ydb' = d(xa' + yb') = d$. Tout diviseur commun à *a* et *b* divise la combinaison entière $xa + yb$ donc divise *d* ; *d* est le plus grand des diviseurs communs à *a* et à *b*, puisqu'il est multiple de tous leurs diviseurs communs. C'est le PGCD.
- Si *a'* et *b'* ne sont pas premiers entre eux, ils ont un diviseur commun $\delta > 1$ et le nombre δd est diviseur commun à *a* et à *b* strictement plus grand que *d* ; le nombre *d* n'est pas le PGCD.

Il y a donc équivalence : *a'* et *b'* sont premiers entre eux si et seulement si *d* est le PGCD.