Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GAUSS

07

Correction

1.a. Donnons une solution particulière de l'équation (E) :

Saisissons l'opportunité d'une solution « évidente » :

$$25 = 5 \times 5 = 24 + 1 = 3 \times 8 + 1$$

Ainsi nous disposons de l'égalité stratégique : $\mathbf{8 \times (-3) + 5 \times 5 = 1.}$

Le couple $(x_0 = -3,\ y_0 = 5)$ est solution particulière de l'équation (E).

1.b. Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) :

Considérons, pour tout couple d'entiers relatifs, l'expression $8x + 5y - 1$. Nous pouvons l'écrire, compte tenu de l'égalité $8 \times (-3) + 5 \times 5 = 1$ vérifiée par la solution particulière $(-3,\ 5)$:

$$8x + 5y - 1 = (8x + 5y) - (8 \times (-3) + 5 \times 5) = 8(x + 3) + 5(y - 5)$$

Nous en déduisons l'équivalence :

$$8x + 5y - 1 = 0 \iff 8(x + 3) + 5(y - 5) = 0$$

Il en résulte qu'un couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs vérifie l'équation $8x + 5y = 1$ si et seulement si le couple $(X = x + 3,\ Y = y - 5)$ vérifie l'équation homogène : $8X + 5Y = 0$ (E_0).

Résolvons cette équation homogène (E_0) :

Cette équation s'écrit aussi bien : $8X = -5Y$.

- 8 est premier avec 5.
- 8 divise le produit $5 \times (-Y)$.

Le théorème de Gauss s'applique : 8 étant premier avec 5 et divisant le produit $5 \times (-Y)$, il divise $-Y$.

Il existe un entier relatif k tel que $Y = -8k$.

Remplaçons dans (E_0) l'entier Y par son expression en fonction du paramètre k.

L'équation (E_0) s'écrit désormais : $8X = -5 \times (-8k) = 8 \times (5k)$. Nous en déduisons : $X = 5k$.

Il existe un entier relatif k tel que $(X,\ Y) = (5k, -8k)$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k : $8 \times (5k) + 5 \times (5 \times (-8k)) = 40k - 40k = 0$, le couple $(5k, -8k)$ est solution de (E_0).

Un couple $(X,\ Y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est solution de (E_0) si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} X = 5k \\ Y = -8k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble $\{(5k, -8k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :

Le couple $(x,\ y)$ est un couple solution de (E) si et seulement si le couple $(X = x + 3,\ Y = y - 5)$ est un couple solution de (E_0) c'est-à-dire si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x + 3 = 5k \\ y - 5 = -8k \end{cases}$.

En conséquence de cette équivalence :

Un couple $(x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est solution de (E) si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x = -3 + 5k \\ y = 5 - 8k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(-3 + 5k,\ 5 - 8k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2.a. Montrons que si $\begin{cases} n = 8a + 1 \\ n = 5b + 2 \end{cases}$, alors $(a, -b)$ est solution de (E) :

Soit n un entier naturel tel qu'il existe deux entiers a et b vérifiant $\begin{cases} n = 8a + 1 \\ n = 5b + 2 \end{cases}$.

Alors, $8a + 1 = 5b + 2$, ou, de façon équivalente : $8 \times a + 5 \times (-b) = 1$, ce qui signifie que le couple $(x = a\ ; y = -b)$ vérifie l'équation $8x + 5y = 1$.

Si un entier n est tel qu'il existe deux entiers a et b vérifiant $\begin{cases} n = 8a + 1 \\ n = 5b + 2 \end{cases}$, alors le couple $(a, -b)$ est un couple solution de (E).

NB. L'énoncé semble considérer comme allant de soi que de tels entiers existent. Mieux vaut cependant s'en assurer …

Réciproquement, soit *k* un entier relatif et $(-3+5k,\ 5-8k)$ le couple solution de (E) qu'il génère.

Posons : $\begin{cases} a_k = -3+5k \\ b_k = -(5-8k) = -5+8k \end{cases}$.

Comparons $8a_k + 1$ avec $5b_k + 2$:

$$\begin{cases} 8a_k + 1 = 8 \times (-3+5k) + 1 = -24 + 40k + 1 = -23 + 40k \\ 5b_k + 2 = 5 \times (-5+8k) + 2 = -25 + 40k + 2 = -23 + 40k \end{cases}$$

Nous trouvons bien le même résultat, les deux relations définissent un seul et même entier.

À tout couple solution de (E), généré par l'entier relatif *k*, nous pouvons associer un entier relatif *n* qui s'écrit à la fois sous les deux formes $\begin{cases} n = 8a + 1 \\ n = 5b + 2 \end{cases}$, c'est l'entier $n = -23 + 40k$.

2.b. Déterminons le reste de la division euclidienne de *n* par 40 :

D'après la réciproque faite dans la question précédente, si *n* est un entier vérifiant les hypothèses de cette question, il est de la forme $n = -23 + 40k$.

Nous pouvons l'écrire aussi bien ainsi : $n = -23 + 40k = -23 + 40(k-1) + 40$.

Soit : $n = 40(k-1) + 17$ et sous cette forme, vu que $0 \leq 17 < 40$, il s'agit de l'écriture authentique de la division euclidienne de l'entier *n* par 40, division dans laquelle le quotient est $k-1$ et le reste est 17 (donc le reste est indépendant de *k*).

Le reste de la division euclidienne de *n* par 40 est toujours égal à 17.

.

3.a. Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $\mathbf{8x + 5y = 100}$:

La résolution est en tout point identique à celle de la question 1 à ceci près qu'il nous faut changer de solution particulière.

- Nous pouvons multiplier par 100 les deux composantes de la solution $(x_0 = -3,\ y_0 = 5)$ trouvée à la question 1, ce qui nous conduit à utiliser la solution particulière $(x_1 = -300,$ $y_1 = 500)$.
- Nous pouvons utiliser une nouvelle opportunité : l'égalité $8 \times 0 + 5 \times 20 = 100$ montre que le couple $(x_2 = 0,\ y_2 = 20)$ est une autre solution particulière. Cette option paraît meilleure.

En utilisant exactement la même démarche que dans la question 1 :

$(x,\ y)$ est un couple solution de $8x + 5y = 100$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x = 5k \\ y = 20 - 8k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble $\mathcal{S}' = \{(5k,\ 20-8k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3.b. Combien d'hommes et combien de femmes :

NB. Sujet collector, témoin d'une époque où la question de l'égalité hommes-femmes ne se posait pas avec acuité.

Soit h le nombre d'hommes et f le nombre de femmes. Par hypothèse, ce sont deux entiers strictement positifs (l'énoncé parle d'un groupe « d'hommes et de femmes »). La dépense faite par le groupe dans l'auberge est d'une part égale à 100 pièces et d'autre part égale à $8h + 5f$. Ainsi, le couple $(h,\ f)$ est un couple solution de l'équation $8x + 5y = 100$, mais dans cette fois dans l'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Il nous faut adjoindre à la résolution faite dans la **question 3.a** des contraintes de stricte positivité :

$\begin{cases} h = 5k > 0 \\ f = 20 - 8k > 0 \end{cases}$, ce qui revient à adjoindre à cette résolution les contraintes : $\begin{cases} k > 0 \\ \frac{5}{2} > k \end{cases}$.

Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, ces contraintes laissent deux valeurs de k, et deux seulement, possibles :

- Ou bien $k = 1$ et en conséquence $\begin{cases} h = 5 \\ f = 12 \end{cases}$.
- Ou bien $k = 2$ et en conséquence $\begin{cases} h = 10 \\ f = 4 \end{cases}$.

Le groupe pouvait être composé de 5 hommes et 12 femmes ou bien de 10 hommes et 4 femmes.

Complément freemaths, retrouvons les résultats de la question 3.b avec Python :

<table>
<tr>
<td>Sachant que le nombre d'hommes peut être entre 1 et 12 inclus, et le nombre de femmes entre 1 et 19 inclus, un algorithme Python permet de détecter par exhaustivité les couples solutions $(h,\ f)$.
Les résultats Python confirment les nôtres.</td>
<td>

```
>>> def auberge():
        n=0
        for h in range(1,13):
                for f in range(1,20):
                        if 8*h+5*f==100:
                                n=n+1
                                print([h,f])
        print("Il y a",n,"possibilités")


>>> auberge()
[5, 12]
[10, 4]
Il y a 2 possibilités
```

</td>
</tr>
</table>