Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GAUSS 06

Correction

Soit (E_0) une équation $ax + by = 0$, (ou aussi bien $ax = -by$), où *a* et *b* sont des entiers relatifs non nuls et **premiers entre eux**. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des couples solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de (E_0) est l'ensemble[1] :

$$\mathcal{S}_0 = \{(kb\,;\,-ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Cet ensemble peut aussi bien se décrire ainsi : $\mathcal{S}_0 = \{(-kb\,;\,ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$, en changeant de paramètre (choix de l'entier relatif $-k$ à la place de *k*).

1. Montrons que (u, v) est solution de l'équation (E_1), $35x - 27y = 2$:

Le jour J_0 est considéré comme le « jour zéro » d'origine du temps. Si les entiers strictement positifs *u* et *v* désignent les nombres de révolutions des corps célestes *A* et *B* sur leurs orbites :

- Le corps céleste *A* passe devant le point observé par l'astronome aux jours : $a(u) = 105u$.
- Le corps céleste *B* passe devant le point observé aux jours : $b(v) = 6 + 81v$.

---

[1] Démonstration :

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs solution de (E_0), soit tel que $ax = -by$

- *a* est premier avec *b*.
- *a* divise le produit $-by = b \times (-y)$

Le théorème de Gauss s'applique : *a* étant premier avec *b* et divisant $b \times (-y)$, a divise $-y$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-y = ka$ soit tel que $y = -ka$.

Remplaçons dans l'équation *Y* par son expression en fonction du paramètre *k*.

L'équation (E_0) s'écrit désormais $ax + b \times (-ka) = 0$ soit $a \times (x - kb) = 0$ et nous en déduisons $x = kb$. Le couple $(x,\ y)$ est de la forme $(kb, -ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \subset \{(kb\,;\,-ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k : $a \times (kb) + b \times (-ka) = 0$, le couple $(kb, -ka)$ est solution de (E_0).

Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \supset \{(kb\,;\,-ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Il y a conjonction si et seulement si les deux corps célestes passent devant le point observé le même jour, c'est-à-dire si et seulement si $a(u) = b(v)$.

$$a(u) = b(v) \iff 105u = 6 + 81v$$

Or : $105 = 3 \times 35$; $81 = 3 \times 27$, le PGCD des coefficients de *u* et de *v* figurant dans cette équation est égal à 3.

Le coefficient $6 = 2 \times 3$ est lui aussi multiple de 3, de sorte que l'équation $105u = 6 + 81v$ est équivalente à l'équation $35u = 2 + 27v$ soit, aussi bien, à l'équation $35u - 27v = 2$

Il y a conjonction si et seulement s'il existe $(u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $35u - 27v = 2$.

2.a. Déterminons un couple d'entiers relatifs solution de (E_1), $35u - 27v = 1$:

Utilisons l'algorithme d'Euclide étendu avec $a = 35$; $b = 27$. Nous obtenons l'égalité : $35 \times (-10) - 27 \times (-13) = 1$ Un couple « solution particulière » de l'équation $35u - 27v = 1$ est le couple $(-10, -13)$.	>>> euclidetendu(35,27) 27 =(0)x 35 +(1)x 27 Division numéro 1 : 35 = 1 x 27 + 8 Combinaison de 35 et 27 égale au reste : 8 =(1)x 35 +(-1)x 27 Division numéro 2 : 27 = 3 x 8 + 3 Combinaison de 35 et 27 égale au reste : 3 =(-3)x 35 +(4)x 27 Division numéro 3 : 8 = 2 x 3 + 2 Combinaison de 35 et 27 égale au reste : 2 =(7)x 35 +(-9)x 27 Division numéro 4 : 3 = 1 x 2 + 1 Combinaison de 35 et 27 égale au reste : 1 =(-10)x 35 +(13)x 27 Division numéro 5 : 2 = 2 x 1 + 0

2.b. Déduisons-en une solution particulière de l'équation (E_2), $35u - 27v = 2$:

Multiplions par 2 les deux composantes du couple solution particulière trouvé à la première question. L'expression $35u - 27v$ étant alors multipliée par ce même coefficient :

Le couple $(u_0 = -20, \; v_0 = -26)$ est une solution particulière de l'équation (E_2).

NB. Vérification : $35 \times (-20) - 27 \times (-26) = -700 + 702 = 2$

2.c. Résolvons l'équation (E_2) dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$35u - 27v = 2 = 35 \times (-20) - 27 \times (-26) \iff 35(u + 20) - 27(v + 26) = 0$$

Un couple $(u,\ v)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E_2) si et seulement si le couple $(U = u + 10,\ V = v + 13)$ est solution de l'équation $35U - 27V = 0$, équation homogène (E_0) associée à l'équation (E).

Si nous appliquons le préambule avec $a = 35$; $b = -27$ à la lettre, l'ensemble des solutions de cette équation homogène (E_0) est l'ensemble : $\mathcal{S}_0 = \{(-27k\ ; -35k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Cependant, cet ensemble est, comme nous l'avons noté en préambule, aussi bien décrit ainsi : $\mathcal{S}_0 = \{(27k\ ;\ 35k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$ (en choisissant comme paramètre l'entier relatif $-k$ à la place de k). Il semble que cette notation soit un peu plus commode dans notre contexte.

Un couple $(u,\ v)$ est solution de (E_2) si et seulement si $(U = u + 10,\ V = v + 13)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_0$ donc si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $\begin{cases} U = u + 20 = 27k \\ V = v + 26 = 35k \end{cases}$, autrement dit tel que $\begin{cases} u = -20 + 27k \\ v = -26 + 35k \end{cases}$.

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de (E_2) est l'ensemble :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}_2 = \{(-20 + 27k,\qquad -26 + 35k),\qquad k \in \mathbb{Z}\}}$$

2.d. Déterminons la solution (*u, v*) permettant de déterminer J_1 :

Les dates d_k de conjonction comptées à partir du jour J_0 sont données indifféremment par l'une ou l'autre des deux formules : $\begin{cases} d_k = 105 \times (-20 + 27k) \\ d_k = 6 + 81 \times (-26 + 35k) \end{cases}$.

Il s'agit de dates passées si d_k est négatif, futures si d_k est positif.

Celle qui représente J_1 est la première date strictement positive. Elle est obtenue lorsque $k = 1$.

Le couple $(u,\ v)$ permettant de déterminer J_1 est le couple $(7, 9)$.

3.a. Déterminons combien de jours entre J_0 et J_1 :

Calculons effectivement $d_1 = 105 \times 7 = 6 + 81 \times 9 = 735$.

Le jour J_1 est le 735$^{\text{ème}}$ jour après J_0.

3.b. Déterminons la date exacte de la conjonction J_1 :

Le 10 décembre 2020 est le 366$^{\text{ème}}$ jour puisque l'année est bissextile, et le 10 décembre 2021 est le 731$^{\text{ème}}$ jour.

Ce 735$^{\text{ème}}$ jour J_1 est le 14 décembre 2021.

NB. Vu que 735 est un multiple de 7 ($735 = 105 \times 7$), le jour dans la semaine doit être le même que le jour J_0, c'est-à-dire un mardi.

NB. Pour information, écriture de l'algorithme Python « **euclidetendu** » utilisé dans la **question 1** :

```
>>> def euclidetendu(a,b):
        x=a
        y=b
        s=1
        t=0
        u=0
        v=1
        n=1
        while y>0:
                r=x%y
                q=int((x-r)/y)
                if n>1:
                        print("Combinaison de ",a,"et",b,"égale au reste :")
                print(y,"=(",u,")x",a,"+(",v,")x",b)
                print("Division numéro",n,":")
                print(x,"=",q,"x",y,"+",r)
                n=n+1
                c=u
                d=v
                u=s-q*u
                v=t-q*v
                s=c
                t=d
                x=y
                y=r
```