# Maths Expertes
## Terminale

# PGCD, Bézout & Gauss

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# GAUSS

05

## Correction

Soit ($E_0$) une équation $ax + by = 0$, (ou aussi bien $ax = -by$), où *a* et *b* sont des entiers relatifs non nuls et **premiers entre eux**. Rappelons que l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des couples solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de ($E_0$) est l'ensemble[1] : $\mathcal{S}_0 = \{(kb\ ;\ -ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Rappelons le théorème de Bézout : deux entiers relatifs *a* et *b* sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs *u* et *v* vérifiant la relation : $ua + vb = 1$

### 1. Montrons que $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux :

Désignons par $a(n) = 14n + 3$ et par $b(n) = 5n + 1$ ces deux entiers relatifs. Cherchons à éliminer *n* entre $a(n)$ et $b(n)$.

Les coefficients de *n* dans les expressions de $a(n)$ et de $b(n)$ sont $14$ et $5$. Ces deux coefficients sont premiers entre eux, leur PPCM est égal à leur produit. Pour éliminer *n* entre $a(n)$ et $b(n)$, nous allons multiplier $a(n)$ par 5 et $b(n)$ par 14, puis nous ferons la différence.

---

[1] Démonstration :

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs solution de ($E_0$), soit tel que $ax = -by$

- *a* est premier avec *b*.
- *a* divise le produit $-by = b \times (-y)$

Le théorème de Gauss s'applique : *a* étant premier avec *b* et divisant $b \times (-y)$, a divise $-y$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-y = ka$ soit tel que $y = -ka$.

Remplaçons dans l'équation *Y* par son expression en fonction du paramètre *k*.

L'équation ($E_0$) s'écrit désormais $ax + b \times (-ka) = 0$ soit $a \times (x - kb) = 0$ et nous en déduisons $x = kb$. Le couple $(x,\ y)$ est de la forme $(kb, -ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \subset \{(kb\ ;\ -ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k : $a \times (kb) + b \times (-ka) = 0$, le couple $(kb, -ka)$ est solution de ($E_0$).

Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \supset \{(kb\ ;\ -ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\begin{cases} a(n) = 14n + 3 \\ b(n) = 5n + 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5a(n) = 70n + 15 \\ 14b(n) = 70n + 14 \end{cases} \Longrightarrow 5a(n) - 14b(n) = (70n + 15) - (70n + 14) = 1.$

Nous avons obtenu la relation : $\mathbf{5a(n) - 14b(n) = 1}$.

Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 5$ et $v = -14$, tels que :

$$u \times a(n) + v \times b(n) = 1$$

D'après le théorème de Bézout, les entiers $a(n) = 14n + 3$ et $b(n) = 5n + 1$ sont des entiers premiers entre eux. Leur PGCD est égal à 1.

**2.a. Justifions que 87 et 31 sont premiers entre eux :**

Etablissons un lien avec la question précédente :

$\begin{cases} 87 = 84 + 3 = 14 \times 6 + 3 = a(6) \\ 31 = 30 + 1 = 5 \times 6 + 1 = b(6) \end{cases}$. Les entiers auxquels nous avons affaire sont ceux de la question précédente dans le cas où $n = 6$.

D'après le résultat de la **question 1**, les entiers $87 = a(6)$ et $31 = b(6)$ sont premiers entre eux.

**2.b. Déterminons *u* et *v* tels $87u + 31v = 1$ et déduisons-en une solution de (E) :**

Nous avons vu dans la **question 1** la relation indépendante de *n* : $5a(n) - 14b(n) = 1$.

Nous pouvons l'appliquer lorsque $n = 6$ : $5 \times a(6) - 14 \times b(6) = 5 \times 87 - 14 \times 31 = 1$.

Les entiers $u = 5$ et $v = -14$ vérifient la relation : $87u + 31v = 1$.

Nous en déduisons en multipliant par 2 chaque membre de cette égalité :

$$87 \times (2u) + 31 \times (2v) = 87 \times 10 + 31 \times (-28) = 2$$

Le couple $(x_0 = 10,\ y_0 = -28)$ est une solution particulière de l'équation (E).

**2.c. Déterminons l'ensemble des solutions de (E) :**

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E). Confrontons l'équation (E) dont ce couple est solution avec l'égalité vérifiée par la solution particulière $(x_0 = 10,\ y_0 = -28)$ que nous avons trouvée :

$$\begin{cases} 87x + 31y = 2 \\ 87 \times 10 + 31 \times (-28) = 2 \end{cases}$$

Retranchons membre à membre : $87(x-10)+31(x+28)=0$. Nous en déduisons que le couple $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple : $(X=x-10,\ Y=y+28)$ est solution de l'équation : $87X+31Y=0$, équation homogène ($E_0$) associée à l'équation (E).

Appliquons le préambule avec $a=87$ ; $b=31$. L'ensemble des solutions de cette équation homogène ($E_0$) est l'ensemble : $\mathcal{S}_0=\{(31k\,;\,-87k),\ \ k\in\mathbb{Z}\}$.

Un couple $(x,\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $(X=x-10,\ Y=y+28)$ appartient à cet ensemble $\mathcal{S}_0$ donc si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que $\begin{cases} x=10+31k \\ y=-28-87k \end{cases}$.

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}=\{(10+31k,\qquad -28-87k),\qquad k\in\mathbb{Z}\}}$$