Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GAUSS

04

Correction

Soit (E_0) une équation $ax + by = 0$, (ou aussi bien $ax = -by$), où *a* et *b* sont des entiers relatifs non nuls et **premiers entre eux**. Rappelons que l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{S}_0}$ des couples solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de (E_0) est l'ensemble[1] :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}_0} = \{(\boldsymbol{kb} \, ; \, -\boldsymbol{ka}), \;\; \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\}$$

NB. Algorithme d'Euclide étendu :

Il s'agit de l'algorithme d'Euclide usuel, mais à chaque étape l'algorithme calcule en outre une combinaison entière des deux nombres initiaux *a* et *b* égale au reste courant. En dernier lieu, l'algorithme donne une combinaison entière de *a* et *b* égale à leur PGCD (donc une identité de Bézout). Cet algorithme peut éventuellement servir à déterminer une solution particulière à l'équation de la **question 1**. Dans cet exercice, nous utilisons une mouture Python de cet algorithme nommée « **euclidetendu** » qui est reproduite en fin de corrigé.

---

[1] Démonstration :

Soit $(x, \; y)$ un couple d'entiers relatifs solution de (E_0), soit tel que $ax = -by$

- *a* est premier avec *b*.
- *a* divise le produit $-by = b \times (-y)$

Le théorème de Gauss s'applique : *a* étant premier avec *b* et divisant $b \times (-y)$, a divise $-y$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-y = ka$ soit tel que $y = -ka$.

Remplaçons dans l'équation *Y* par son expression en fonction du paramètre *k*.

L'équation (E_0) s'écrit désormais $ax + b \times (-ka) = 0$ soit $a \times (x - kb) = 0$ et nous en déduisons $x = kb$. Le couple $(x, \; y)$ est de la forme $(kb, -ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \subset \{(kb \; ; \; -ka), \;\; k \in \mathbb{Z}\}$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k : $a \times (kb) + b \times (-ka) = 0$, le couple $(kb, -ka)$ est solution de (E_0).

Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \supset \{(kb \; ; \; -ka), \;\; k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Déterminons une solution particulière de l'équation $16x + 21y = 1$:

<table>
<tr>
<td>Nous utilisons l'algorithme d'Euclide étendu avec $a = 21$; $b = 16$.
Nous obtenons l'égalité :
$$16 \times 4 + 21 \times (-3) = 1$$
Un couple « solution particulière » de l'équation $16x + 21y = 1$ est le couple $(4, -3)$.
L'existence d'une telle solution prouve que 16 et 21 sont premiers entre eux.</td>
<td>

```
>>> euclidetendu(21,16)
16 =( 0 )x 21 +( 1 )x 16
Division numéro 1 :
21 = 1 x 16 + 5
Combinaison de  21 et 16 égale au reste :
5 =( 1 )x 21 +( -1 )x 16
Division numéro 2 :
16 = 3 x 5 + 1
Combinaison de  21 et 16 égale au reste :
1 =( -3 )x 21 +( 4 )x 16
Division numéro 3 :
5 = 5 x 1 + 0
```

</td>
</tr>
</table>

2. Déduisons-en une solution particulière de l'équation (E), $16x + 21y = 797$:

Multiplions par 797 les deux composantes du couple solution particulière trouvé à la première question. L'expression $16x + 21y$ étant alors multipliée par ce même coefficient :

Le couple$(x_0 = 797 \times 4 = 3188, \ \ y_0 = 797 \times (-3) = -2391)$ est une solution particulière de l'équation (E).

(Vérification : $16 \times 3188 - 21 \times 2391 = 51008 - 50211 = 797$).

3. Résolvons l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$16x + 21y = 797 = 16 \times 3188 + 21 \times (-2391) \quad \Leftrightarrow \quad 16(x - 3188) + 21(y + 2391) = 0$$

Un couple $(x, \ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple $(X = x - 3188, \ Y = y + 2391)$ est solution de l'équation $16x + 21y = 0$, équation homogène (E_0) associée à l'équation (E).

Appliquons le préambule avec $a = 16$; $b = 21$. L'ensemble des solutions de cette équation homogène (E_0) est l'ensemble : $\mathcal{S}_0 = \{(21k \ ; \ -16k), \ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Un couple $(x, \ y)$ est solution de (E) si et seulement si $(X = x - 3188, \ Y = y + 2391)$ appartient à cet ensemble $\mathcal{S}_0$ donc si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que $\begin{cases} x = 3188 + 21k \\ y = -2391 - 16k \end{cases}$.

Nous en déduisons que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble :

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{(3188 + 21k, -2391 - 16k), \qquad k \in \mathbb{Z}\}}$$

4.Essayons de déterminer le nombre de repas servis par le restaurateur :

Désignons par *x* le nombre de repas « plat-dessert » et par *y* le nombre de repas « entrée-plat-dessert » servis par le restaurateur au cours de la journée. Compte tenu des prix respectifs 16 € et 21 € de chaque type de menu, la recette de la journée en euros s'exprime en fonction de *x* et de *y* par la formule : $R(x, y) = 16x + 21y$. Par hypothèse, la recette de la journée s'élève à 797 €.

Le couple (x, y) est donc un couple solution de l'équation $16x + 21y = 797$.

Or, par définition, les nombres *x* et *y* sont des entiers naturels puisqu'ils représentent des nombres de repas.

Nous devons résoudre l'équation $16x + 21y = 797$ non plus dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ comme ci-dessus mais dans l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Il nous faut adjoindre à la résolution précédente des contraintes de positivité, à savoir :

$$\begin{cases} x = 3188 + 21k \geq 0 \\ y = -2391 - 16k \geq 0 \end{cases}$$

.

L'entier relatif *k* défini dans la **question 3** doit vérifier les deux inégalités $\begin{cases} k \geq -\frac{3188}{21} \\ -\frac{2391}{16} \geq k \end{cases}$.

Une calculatrice nous indique les encadrements : $151{,}8 < \frac{3188}{21} < 151{,}9$ et $149{,}4 < \frac{2391}{16} < 149{,}5$

Dans l'ensemble des entiers relatifs : $\begin{cases} k \geq -\frac{3188}{21} \\ -\frac{2391}{16} \geq k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -151 \\ -150 \geq k \end{cases}$

L'entier *k* peut donc prendre deux valeurs et deux seulement : ou bien -150 ou bien -151.

- Si $k = -150$, alors : $\begin{cases} x = 3188 - 21 \times 150 = 38 \\ y = -2391 + 16 \times 150 = 9 \end{cases}$.
- Si $k = -151$, alors : $\begin{cases} x = 3188 - 21 \times 151 = 17 \\ y = -2391 + 16 \times 151 = 25 \end{cases}$.

Le restaurateur a pu servir 38 repas « plat-dessert » et 9 repas « entrée-plat-dessert » ou bien 17 repas « plat-dessert » et 25 repas « entrée-plat-dessert ».

NB. L'équation (E) admet dans l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ deux couples solutions exactement. Nous n'avons donc pas pu « déterminer » le nombre de repas servis puisqu'il y a deux solutions différentes. La réponse à la question est « non ».

4. Complément Freemaths, retrouvons les solutions avec Python :

<table>
<tr>
<td>La recette s’élevant à 797 euros, le nombre de repas à 16 euros servis est certainement < 50, et celui des repas à 21 euros est < 38.
L’algorithme « restau » recherche exhaustivement tous les couples possibles. Ses résultats concordent avec les nôtres.</td>
<td>

```
>>> def restau():
        n=0
        for x in range(0,50):
                for y in range(0,38):
                        if 16*x+21*y==797:
                                n=n+1
                                print([x,y])
        print("Il y a",n,"possibilités")


>>> restau()
[17, 25]
[38, 9]
Il y a 2 possibilités
```

</td>
</tr>
</table>

NB. Pour information, écriture de l’algorithme Python « **euclidetendu** » utilisé dans la **question 1** :

```
>>> def euclidetendu(a,b):
        x=a
        y=b
        s=1
        t=0
        u=0
        v=1
        n=1
        while y>0:
                r=x%y
                q=int((x-r)/y)
                if n>1:
                        print("Combinaison de ",a,"et",b,"égale au reste :")
                print(y,"=(",u,")x",a,"+(",v,")x",b)
                print("Division numéro",n,":")
                print(x,"=",q,"x",y,"+",r)
                n=n+1
                c=u
                d=v
                u=s-q*u
                v=t-q*v
                s=c
                t=d
                x=y
                y=r
```