# Maths Expertes
## Terminale

# PGCD, Bézout & Gauss

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

# GAUSS

03

## Correction

Soit ($E_0$) une équation $ax + by = 0$, (ou aussi bien $ax = -by$), où *a* et *b* sont des entiers relatifs non nuls et **premiers entre eux**. Rappelons une fois pour toutes que l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{S}_0}$ des couples solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de ($E_0$) est l'ensemble[1] :

$$\boldsymbol{\mathcal{S}_0 = \{(kb\ ;\ -ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}}$$

Cet exercice a pour objectif la résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'équations (E) du type $ax + by = c$, où *a* et *b* sont des entiers relatifs non nuls. Dans chaque cas, nous allons appliquer la démarche suivante :

a. Recherche d'un couple solution particulier $(x_0,\ y_0)$ de l'équation (E) soit empiriquement, soit à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu.
b. Un couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple $(X = x - x_0, Y = y - y_0)$ est solution de l'équation $ax + by = 0$, équation ($E_0$) dite « homogène » associée à l'équation (E).
c. Résolution de (E) à l'aide de l'équivalence du b.

---

[1] Démonstration :

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs solution de ($E_0$), soit tel que $ax = -by$

- *a* est premier avec *b*.
- *a* divise le produit $-by = b \times (-y)$

Le théorème de Gauss s'applique : *a* étant premier avec *b* et divisant $b \times (-y)$, a divise $-y$.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-y = ka$ soit tel que $y = -ka$.

Remplaçons dans ($E_0$) *y* par son expression en fonction du paramètre *k*.

L'équation ($E_0$) s'écrit désormais $ax + b \times (-ka) = 0$ soit $a \times (x - kb) = 0$ et nous en déduisons $x = kb$. Le couple $(x,\ y)$ est de la forme $(kb, -ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \subset \{(kb\ ;\ -ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k : $a \times (kb) + b \times (-ka) = 0$, le couple $(kb, -ka)$ est solution de ($E_0$).

Ce qui montre l'inclusion $\mathcal{S}_0 \supset \{(kb\ ;\ -ka),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

**NB. Algorithme d'Euclide étendu :**

Il s'agit de l'algorithme d'Euclide usuel, mais à chaque étape l'algorithme calcule en outre une combinaison entière des deux nombres initiaux *a* et *b* égale au reste courant. En dernier lieu, l'algorithme donne une combinaison entière de *a* et *b* égale à leur PGCD (donc une identité de Bézout). Dans cet exercice, nous utiliserons le cas échéant une mouture Python de cet algorithme nommée « **euclidetendu** » qui est reproduite en fin de corrigé.

## 1. Résolvons l'équation (E), $24x + 17y = 1$ :

| | |
|---|---|
| **a. Déterminons une solution particulière de l'équation :**<br>Nous utilisons pour cela l'algorithme d'Euclide étendu.<br>Un couple solution de (E) est le couple :<br>$(x_0 = 5, \quad y_0 = -7)$<br>L'existence d'une telle solution prouve que 24 et 17 sont premiers entre eux. | `>>> euclidetendu(24,17)`<br>`Combinaison de  24 et 17 égale au reste :`<br>`17 =( 0 )x 24 +( 1 )x 17`<br>`Division numéro 1 :`<br>`24 = 1 x 17 + 7`<br>`Combinaison de  24 et 17 égale au reste :`<br>`7 =( 1 )x 24 +( -1 )x 17`<br>`Division numéro 2 :`<br>`17 = 2 x 7 + 3`<br>`Combinaison de  24 et 17 égale au reste :`<br>`3 =( -2 )x 24 +( 3 )x 17`<br>`Division numéro 3 :`<br>`7 = 2 x 3 + 1`<br>`Combinaison de  24 et 17 égale au reste :`<br>`1 =( 5 )x 24 +( -7 )x 17`<br>`Division numéro 4 :`<br>`3 = 3 x 1 + 0` |

**b. Faisons un lien entre l'équation (E) et son équation homogène associée :**

$$24x + 17y = 1 = 24 \times 5 - 17 \times 7 \iff 24(x-5) + 17(y+7) = 0$$

Un couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple $(X = x - 5,\ Y = y + 7)$ est solution de l'équation $24x + 17y = 0$, équation homogène ($E_0$) associée à l'équation (E).

**c. Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :**

Appliquons le préambule avec $a = 24\ ;\ \ b = 17$

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $(X = x - 5,\ Y = y + 7)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_0 = \{(17k\ ;\ -24k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

Nous en déduisons :

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que : $\begin{cases} x = 5 + 17k \\ y = -7 - 24k \end{cases}$

NB. Une formulation équivalente :

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{(5 + 17k, -7 - 24k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

**2. Résolvons l'équation (E), $\mathbf{11x - 3y = 1}$ :**

**a. Déterminons une solution particulière de l'équation :**

Un couple solution de (E) est le couple : $(x_0 = -1,\ y_0 = -4)$

Nous trouvons cette solution soit parce que nous la trouvons « évidente » ($12 = 3 \times 4 = 11 + 1$ donc nous disposons de l'égalité stratégique : $11 \times (-1) - 3 \times (-4) = 1$ soit par l'algorithme d'Euclide étendu exécuté avec $a = 11,\ b = 3$

**b. Faisons un lien entre l'équation (E) et son équation homogène associée :**

$$11x - 3y = 1 = 11 \times (-1) - 3 \times (-4) \iff 11(x+1) - 3(y+4) = 0$$

Un couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple $(X = x + 1,\ Y = y + 4)$ est solution de l'équation $11x - 3y = 0$, équation homogène ($E_0$) associée à l'équation (E).

**c. Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :**

Appliquons le préambule avec $a = 11\ ;\ b = -3$

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $(X = x + 1,\ Y = y + 4)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_0 = \{(3k\ ;\ 11k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$. Nous en déduisons :

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe un entier relatif $k$ tel que : $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = -4 + 11k \end{cases}$

NB. Une formulation équivalente :

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{(-1 + 3k,\ -4 + 11k),\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

**3. Résolvons l'équation (E), $\mathbf{5x + 13y = 3}$ :**

**a. Déterminons une solution particulière de l'équation :**

Une solution particulière de (E) est le couple : $(x_0 = -2,\ y_0 = 1)$.

En effet, $13 = 10 + 3 = 2 \times 5 + 3$ soit $\mathbf{(-2) \times 5 + 13 \times 1 = 3}$.

**b. Faisons un lien entre l'équation (E) et son équation homogène associée :**

$$5x + 13y = 3 = (-2) \times 5 + 13 \iff 5(x+2) + 13(y-1) = 0$$

Un couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple $(X = x + 2,\ Y = y - 1)$ est solution de l'équation $5x + 13y = 0$, équation homogène ($E_0$) associée à l'équation (E).

**c. Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :**

Appliquons le préambule avec $a = 5$ ; $b = 13$

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $(X = x + 2,\ Y = y - 1)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_0 = \{(13k\ ;\ -5k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$. Nous en déduisons :

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que : $\begin{cases} x = -2 + 13k \\ y = 1 - 5k \end{cases}$

NB. Une formulation équivalente :

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{(-2 + 13k,\quad 1 - 5k),\quad k \in \mathbb{Z}\}}$$

**4. Résolvons l'équation (E), $\mathbf{19x - 2y = 5}$ :**

**a. Déterminons une solution particulière de l'équation :**

Une solution particulière de (E) est le couple : $(1,\ 7)$.

En effet, $19 = 14 + 5 = 2 \times 7 + 5$ soit $\mathbf{19 \times 1 - 2 \times 7 = 5}$.

**b. Faisons un lien entre l'équation (E) et son équation homogène associée :**

$$19x - 2y = 5 = 19 - 2 \times 7 \iff 19(x - 1) - 2(y - 7) = 0$$

Un couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple $(X = x - 1,\ Y = y - 7)$ est solution de l'équation $19x - 2y = 0$, équation homogène ($E_0$) associée à l'équation (E).

**c. Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :**

Appliquons le préambule avec $a = 19$ ; $b = -2$

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si $(X = x - 1,\ Y = y - 7)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_0 = \{(2k\ ;\ 19k),\ \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Nous en déduisons :

Un couple $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 7 + 19k \end{cases}$

NB. Une formulation équivalente :

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{(1 + 2k,\ 7 + 19k),\ k \in \mathbb{Z}\}.}$$

NB. Ecriture de l'algorithme Python « **euclidetendu** » utilisé dans la **question 1** :

```
>>> def euclidetendu(a,b):
        x=a
        y=b
        s=1
        t=0
        u=0
        v=1
        n=1
        while y>0:
                r=x%y
                q=int((x-r)/y)
                if n>1:
                        print("Combinaison de ",a,"et",b,"égale au reste :")
                print(y,"=(",u,")x",a,"+(",v,")x",b)
                print("Division numéro",n,":")
                print(x,"=",q,"x",y,"+",r)
                n=n+1
                c=u
                d=v
                u=s-q*u
                v=t-q*v
                s=c
                t=d
                x=y
                y=r
```

Pour information, l'exécution de l'algorithme d'Euclide étendu d'abord avec $a = 11$ et $b = 3$. (Voir **question 2**).

Ensuite, l'algorithme est exécuté avec $a = 13$ et $b = 5$. Il donne l'égalité :

$5 \times (-5) + 13 \times 2 = 1$, d'où nous aurions pu déduire, en multipliant par 3, l'égalité : $5 \times (-15) + 13 \times 6 = 3$ et la solution particulière $(-15,\ 6)$ pour l'équation de la **question 3**.

```
>>> euclidetendu(11,3)
3 =( 0 )x 11 +( 1 )x 3
Division numéro 1 :
11 = 3 x 3 + 2
Combinaison de  11 et 3 égale au reste :
2 =( 1 )x 11 +( -3 )x 3
Division numéro 2 :
3 = 1 x 2 + 1
Combinaison de  11 et 3 égale au reste :
1 =( -1 )x 11 +( 4 )x 3
Division numéro 3 :
2 = 2 x 1 + 0
>>> euclidetendu(13,5)
5 =( 0 )x 13 +( 1 )x 5
Division numéro 1 :
13 = 2 x 5 + 3
Combinaison de  13 et 5 égale au reste :
3 =( 1 )x 13 +( -2 )x 5
Division numéro 2 :
5 = 1 x 3 + 2
Combinaison de  13 et 5 égale au reste :
2 =( -1 )x 13 +( 3 )x 5
Division numéro 3 :
3 = 1 x 2 + 1
Combinaison de  13 et 5 égale au reste :
1 =( 2 )x 13 +( -5 )x 5
Division numéro 4 :
2 = 2 x 1 + 0
```