Maths Expertes

Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GAUSS

02

Correction

Cet exercice reprend pas à pas, sur un exemple simple, les différentes étapes de la méthode de résolution usuelle dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'une équation diophantienne homogène du type $ax = by$.

Rappelons l'énoncé du théorème de Gauss qui joue ici un rôle décisif :

Soit *a, b, c* trois entiers relatifs. Si *a* divise le produit *bc* et s'il est premier avec *b*, alors il divise *c*.

1. Justifions que (X, Y) solution de (E) $\Rightarrow$ $(\exists k \in \mathbb{Z})$, $\begin{cases} X = 3k \\ Y = 2k \end{cases}$:

Soit (X, Y) un couple d'entiers relatifs solution de (E), c'est-à-dire tel que $2X = 3Y$.

Les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux (par exemple parce que $3 - 2 = 1$, relation montrant que 2 et 3 vérifient l'identité de Bézout).

- 2 est premier avec 3.
- 2 divise le produit $3 \times Y$.

Le théorème de Gauss s'applique : 2 étant premier avec 3 et divisant le produit $3 \times Y$, il divise *Y*.

Il existe un entier relatif *k* tel que $Y = 2k$.

Remplaçons dans l'équation(E) le nombre *Y* par son expression en fonction du paramètre *k*.

L'équation (E) s'écrit désormais : $2X = 3 \times (2k)$.

Or : $3 \times (2k) = 6\mathrm{k} = 2 \times (3k)$ en raison des propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication des entiers.

Nous en déduisons $2X = 2 \times (3k)$ puis : $X = 3k$.

Si $(X,\ Y)$ est un couple solution de (E), alors il existe un entier relatif *k* tel que : $\begin{cases} X = 3k \\ Y = 2k \end{cases}$.

2. Vérifions réciproquement que $(\exists \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z})$, $\begin{cases} \boldsymbol{X} = \boldsymbol{3k} \\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{2k} \end{cases} \Rightarrow (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ solution de (E) :

Réciproquement, pour tout entier relatif *k*, $2 \times (3k) = 6k = 3 \times (2k)$, comme nous l'avons vu.

Pour tout entier relatif *k*, le couple $(3k,\ 2k)$ est solution de (E).

3. Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :

- La **question 1** montre que l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ est inclus dans l'ensemble $\{(3k,\ 2k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- La **question 2** montre que l'ensemble $\{(3k,\ 2k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est inclus dans l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{S}}$**.**

En raison de ces inclusions mutuelles, les deux ensembles sont égaux.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(3k,\ 2k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

NB. Cette démarche peut être étendue sans changement autre que numérique à la résolution générale de l'équation $ax = by$, lorsque *a* et *b* sont deux entiers relatifs non nuls **premiers entre eux**.
L'ensemble des solutions de l'équation $ax = by$, lorsque *a* et *b* sont premiers entre eux, est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(kb,\ ka),\ k \in \mathbb{Z}\}$.