Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Freemaths : Tous droits réservés

GAUSS

01

Correction

Cet exercice détaille différentes étapes que l'on rencontre dans la méthode usuelle de résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'une équation $ax + by = c$.

Rappelons l'énoncé du théorème de Gauss, utile pour la résolution de la **question 1** :

Soit *a, b, c* trois entiers relatifs. Si *a* divise le produit *bc* et s'il est premier avec *b*, alors il divise *c*.

1. Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation (E_1), $11X = 15Y$:

Le nombre 11, en tant que nombre premier, est premier avec tout entier qu'il ne divise pas, ce qui est le cas de 15.

- 11 est premier avec 15.
- 11 divise le produit $15 \times Y$.

Le théorème de Gauss s'applique : 11 étant premier avec 15 et divisant le produit $15 \times Y$, il divise *Y*.

Il existe un entier relatif *k* tel que $Y = 11k$.

Remplaçons dans (E_1) l'entier *Y* par son expression en fonction du paramètre *k*.

L'équation (E_1) s'écrit désormais : $11X = 15 \times (11k) = 11 \times (15k)$. Nous en déduisons : $X = 15k$.

Réciproquement, pour tout entier relatif *k* : $11 \times (15k) = 15 \times (11k)$, le couple $(15k,\ 11k)$ est solution de (E_1).

Un couple $(X,\ Y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est solution de (E_1) si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} X = 15k \\ Y = 11k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (E_1) est l'ensemble $\{(15k,\ 11k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

Freemaths : Tous droits réservés

2. Déterminons une solution particulière de l'équation (E_2) :

Saisissons l'opportunité d'une solution « évidente » :

$$33 = 11 \times 3 = 30 + 3 = 15 \times 2 + 3$$

Ainsi nous disposons de l'égalité stratégique : $\mathbf{11 \times 3 - 15 \times 2 = 3.}$

Le couple $(x_0 = 3,\ y_0 = 2)$ est solution particulière de l'équation (E_2).

3. Montrons que $(x,\ y)$solution de (E_2) implique $(x - x_0,\ y - y_0)$ solution de (E_1) :

NB. L'abréviation « ssi… » figurant dans l'énoncé est censée signifier « seulement si ». La locution abrégée « (proposition *A*) ssi (proposition *B*) », certes quelque peu ambigüe, est censée signifier « $A \Longrightarrow B$ » ou en langage un peu plus courant « si *A* alors *B* » ; c'est une implication directe que nous devons démontrer.

Cette abréviation « ssi » se différencie de l'abréviation « si et ssi » qui est censée signifier « si et seulement si » c'est-à-dire « est équivalent à ». Il n'est pas conseillé d'utiliser ce genre d'abréviation dans la rédaction d'une solution.

Définissons la fonction de *x* et *y* définie pour tout couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs par l'expression :

$$f(x, y) = 11x - 15y$$

Confrontons l'expression générale $f(x, y)$ avec la valeur qu'elle prend en un couple $(x_0,\ y_0)$ particulier : $\begin{cases} f(x, y) = 11x - 15y \\ f(x_0,\ y_0) = 11x_0 - 15y_0 \end{cases}.$

Si nous faisons la différence, nous obtenons la relation :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = (11x - 15y) - (11x_0 - 15y_0) = 11(x - x_0) - 15(y - y_0)$$

Soit :
$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x - x_0,\ y - y_0)$$

NB. Cette fonction *f* de deux variables est « additive », elle vérifie notamment la propriété : « l'image d'une différence est égale à la différence des images ».

La question précédente a permis de trouver un couple $(x_0,\ y_0)$, en l'occurrence le couple $(x_0 = 3,\ y_0 = 2)$, vérifiant l'égalité : $f(x_0,\ y_0) = 3$, au titre de solution particulière de (E_1).

Appliquons l'additivité de la fonction *f* avec précisément ce couple solution particulière.

Supposons que $(x,\ y)$ soit un couple solution de (E_2). Alors,

$f(x, y) = 3 \ \Longrightarrow \ f(x,\ y) - f(x_0,\ y_0) = 3 - 3 = 0.$

Autrement dit : $f(x, y) = 3 \ \Longrightarrow \ f(x - x_0,\ y - y_0) = 0,$

Soit, avec les notations $\begin{cases} X = x - x_0 = x - 3 \\ Y = y - y_0 = y - 2 \end{cases}$, $\quad 11X - 15Y = 0$

Si $(x,\ y)$ est un couple solution de (E_2), alors (X, Y) est un couple solution de (E_1).

4. Déduisons-en l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :

D'après le résultat de la **question 3**, si $(x,\ y)$ est un couple solution de (E_2), alors le couple $(X = x - 3,\ Y = y - 2)$ est un couple solution de (E_1).

D'après le résultat de la **question 1**, le couple $(x - 3,\ y - 2)$ étant un couple solution de (E_1), il existe un entier relatif *k* tel que $\begin{cases} x - 3 = 15k \\ y - 2 = 11k \end{cases}$ soit tel que $\begin{cases} x = 3 + 15k \\ y = 2 + 11k \end{cases}$.

NB. Vu que dans la **question 3**, nous avons établi seulement, une implication, et non une équivalence, nous n'avons démontré que l'inclusion $\mathcal{S} \subset \{(3 + 15k,\ 2 + 11k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ (conformément à la consigne de l'énoncé). Il est indispensable d 'envisager une étude réciproque : Si un couple est de la forme $(x = 3 + 15k,\ y = 2 + 11k)$ avec *k* entier relatif, est-il solution de (E_2) ?

Réciproquement, pour tout entier relatif *k* :

$$11 \times (3 + 15k) - 15 \times (2 + 11k) = 33 + 45k - 30 - 45k = 3$$

Pour tout entier relatif *k*, le couple $(3 + 15k,\ 2 + 11k)$ est solution de (E_2).

NB. Cette réciproque démontre l'inclusion : $\mathcal{S} \supset \{(3 + 15k,\ 2 + 11k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Bilan :

$(x,\ y)$ est un couple solution de (E_2) si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x = 3 + 15k \\ y = 2 + 11k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (E_2) est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(3 + 15k,\ 2 + 11k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.