Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Bézout

06

Correction

Exercice de synthèse avec comme application pratique la recherche de points à coordonnées entières situés sur une droite. À recommander sans modération.

1. Montrons que les entiers $7n+3$ et $5n+2$ sont premiers entre eux :

Désignons par $a(n)=7n+3$ et par $b(n)=5n+2$ ces deux entiers relatifs. Cherchons à éliminer *n* entre $a(n)$ et $b(n)$.

Les coefficients de *n* dans les expressions de $a(n)$ et de $b(n)$ sont 7 et 5. Ces deux coefficients sont premiers entre eux, leur PPCM est égal à leur produit. Pour éliminer *n* entre $a(n)$ et $b(n)$, nous allons multiplier $a(n)$ par 5 et $b(n)$ par 7, puis nous ferons la différence.

$$\begin{cases} a(n)=7n+3 \\ b(n)=5n+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5a(n)=35n+15 \\ 7b(n)=35n+14 \end{cases} \Longrightarrow 5a(n)-7b(n)=(35n+15)-(35n+14)=1$$

Nous avons obtenu la relation indépendante de *n* : $\mathbf{5a(n)-7b(n)=1}$. Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u=5$ et $v=-7$, tels que $u\times a(n)+v\times b(n)=1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $a(n)=7n+3$ et $b(n)=5n+2$ sont des entiers premiers entre eux.

2.a. Justifions que 73 et 52 sont premiers entre eux :

Etablissons un lien avec la question précédente :

$\begin{cases} 73=7\times 10+3=a(10) \\ 52=5\times 10+2=b(10) \end{cases}$. Les entiers auxquels nous avons affaire sont exactement ceux de la question précédente dans le cas où $n=10$.

D'après le résultat de la **question 1**, les entiers $73=a(10)$ et $52=b(10)$ sont premiers entre eux.

2.b. Déterminons *u* et *v* tels $73u + 52v = 1$ et déduisons-en une solution de (E) :

Nous avons vu dans la **question 1** la relation indépendante de n : $5a(n) - 7b(n) = 1$.

Nous pouvons l'appliquer lorsque $n = 10$: $5 \times a(10) - 7 \times b(10) = 5 \times 73 - 7 \times 52 = 1$.

Les entiers $u = 5$ et $v = -7$ vérifient la relation : $73u + 52v = 1$.

Nous en déduisons en multipliant par 2 chaque membre de cette égalité :

$$73 \times (2u) + 52 \times (2v) = 73 \times 10 - 52 \times 14 = 2$$

Le couple $(x_0 = 10,\ y_0 = -14)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2.c. Déterminons l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E). Confrontons l'équation (E) dont ce couple est solution avec l'égalité vérifiée par la solution particulière $(x_0 = 10,\ y_0 = -14)$ que nous avons trouvée :

$$\begin{cases} 73x + 52y = 2 \\ 73 \times 10 + 52 \times (-14) = 2 \end{cases}$$

Retranchons membre à membre : $73(x - 10) + 52(x + 14) = 0$. Nous en déduisons que :

Le couple $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple :

$(X = x - 10,\ Y = y + 14)$ est solution de l'équation : $73X + 52Y = 0$ $\quad$ (E_0)

Résolvons l'équation homogène (E_0) :

Cette équation s'écrit aussi bien : $-73X = 52Y$; 73 divise le premier membre, donc il divise le second. 73 divise $52Y$ et est premier avec 52, d'après le théorème de Gauss, il divise Y. Il existe un entier relatif k tel que : $Y = 73k$ soit $Y = 73k$.

Remplaçons dans (E_0) l'entier Y par son expression en fonction du paramètre k. L'équation (E_0) s'écrit désormais : $-73X = 52 \times (73k) = 73 \times (52k)$. Nous en déduisons : $X = -52k$.

Si $(X,\ Y)$ est un couple solution de (E_0), alors il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} X = -52k \\ Y = 73k \end{cases}$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k : $73 \times (-52k) + 52 \times (73k) = -3796k + 3796k = 0$, le couple $(-52k,\ 73k)$ est solution de (E_H).

$(X,\ Y)$ est un couple solution de (E_0) si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} X = -52k \\ Y = 73k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (E_0) est l'ensemble $\{(-52k, 73k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

NB. L'ensemble des solutions de (E_0) pourrait aussi bien se noter $\{(52k, -73k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ en changeant le paramètre relatif k en $-k$. Le lecteur est libre de son choix.

Déduisons-en les solutions de (E) :

Un couple $(x,\ y)$ d'entiers relatifs est solution de (E) si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} x - 10 = -52k \\ y + 14 = 73k \end{cases}$ soit tel que $\begin{cases} x = 10 - 52k \\ y = -14 + 73k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble $\mathcal{S} = \{(10 - 52k, -14 + 73k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Déterminons l'ensemble des points à coordonnées entières de (D) situés dans le domaine imparti :

L'équation réduite de la droite (D), $y = -\frac{73}{52}x + \frac{1}{26}$ est équivalente à l'équation : $52y = -73y + 2$, elle-même équivalente à l'équation (E) que nous avons résolue dans la question précédente.

Un point à coordonnées entières est situé sur la droite (D) si et seulement si ses coordonnées constituent un couple solution de (E), c'est-à-dire si et seulement si ce couple appartient à l'ensemble $\{(10 - 52k, -14 + 73k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Cherchons ceux de ces points qui appartiennent au domaine $[-1000\,;1000] \times [-1000\,;1000]$.

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que l'entier k défini ci-dessus vérifie les inégalités :

$\begin{cases} -1000 \leq 10 - 52k \leq 1000 \\ -1000 \leq -14 + 73k \leq 1000 \end{cases}$ autrement dit $\begin{cases} -1010 \leq -52k \leq 990 \\ -986 \leq 73k \leq 1014 \end{cases}$.

Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ ce système d'inéquations.

$$\begin{cases} -1010 \leq -52k \leq 990 \\ -986 \leq 73k \leq 1014 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{505}{26} \leq -k \leq \dfrac{495}{26} \text{ soit } \dfrac{505}{26} \geq k \geq -\dfrac{495}{26} \\ -\dfrac{986}{73} \leq k \leq \dfrac{1014}{73} \end{cases}$$

Une calculatrice nous indique les encadrements suivants :

$$19{,}4 < \frac{505}{26} < 19{,}5\,;19 < \frac{495}{26} < 19{,}1\,;13{,}5 < \frac{986}{73} < 13{,}6\,;13{,}8 < \frac{1014}{73} < 13{,}9$$

Dans l'ensemble des entiers relatifs, nous en déduisons que :

$$\begin{cases} \dfrac{505}{26} \geq k \geq -\dfrac{495}{26} \\ -\dfrac{986}{73} \leq k \leq \dfrac{1014}{73} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19 \geq k \geq -19 \\ -13 \leq k \leq 13 \end{cases}$$

Il en résulte que la CNS portant sur k se résume à la condition : $-13 \leq k \leq 13$.

L'ensemble des points à coordonnées entières situés sur la droite (D) sont les points dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble : $\{(10 + 52k, -14 - 73k),\ k \in \mathbb{Z}, -13 \leq k \leq 13\}$.

Complément spécial freemaths. Retrouvons ces points avec Python :

L'algorithme « pointsD » recherche de façon exhaustive, dans le domaine imparti, tous les points dont les coordonnées vérifient l'équation (E) et en affiche la liste.

Nous reconnaissons notamment dans la liste affichée le point de coordonnées $(10\ ;\ -14)$ que nous avons utilisé ci-dessus.

L'algorithme trouve 27 points, ce qui concorde bien avec notre condition $-13 \leq k \leq 13$.

```python
def pointsD():
    n=0
    print("Les points trouvés sont :")
    for x in range(-1000,1001):
            for y in range(-1000,1001):
                    if 73*x+52*y==2:
                            n=n+1
                            print([x,y])
    print("Il y a",n,"points.")
```

```
>>> pointsD()
Les points trouvés sont :
[-666, 935]
[-614, 862]
[-562, 789]
[-510, 716]
[-458, 643]
[-406, 570]
[-354, 497]
[-302, 424]
[-250, 351]
[-198, 278]
[-146, 205]
[-94, 132]
[-42, 59]
[10, -14]
[62, -87]
[114, -160]
[166, -233]
[218, -306]
[270, -379]
[322, -452]
[374, -525]
[426, -598]
[478, -671]
[530, -744]
[582, -817]
[634, -890]
[686, -963]
Il y a 27 points.
```