Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Bézout

05

Correction

Rappelons le théorème de Bézout :

Deux entiers relatifs *a* et *b* sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des entiers relatifs *u* et *v* tels que : $ua + vb = 1$

Cet exercice en propose des applications à propos de deux entiers *a* et *b* dépendant d'un paramètre entier *n*. L'énoncé suppose que *n* est un « entier naturel non nul ». Cependant, cette hypothèse n'est pas obligatoire. Nous pourrions supposer simplement que *n* est un entier relatif quelconque, nos démonstrations n'en seraient en rien affectées.

NB. Dans les questions 1 et 2, ces entiers *a* et *b* s'expriment comme des fonctions affines à coefficients entiers de la variable *n*. Nous chercherons par une combinaison linéaire des deux expressions à éliminer *n* entre ces deux entiers.

1. Montrons que $a = 7n + 2$ et $b = 11n + 3$ sont premiers entre eux :

Les coefficients de *n* dans les expressions de *a* et de *b* sont, respectivement, 7 et 11. Ces deux entiers sont premiers entre eux, leur PPCM est égal à leur produit. Pour éliminer *n* entre *a* et *b*, nous allons multiplier *a* par 11, *b* par 7, puis nous ferons la différence.

$$\begin{cases} a = 7n + 2 \\ b = 11n + 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 11a = 77n + 22 \\ 7b = 77n + 21 \end{cases} \Longrightarrow 11a - 7b = (77n + 22) - (77n + 21) = 1$$

Nous avons obtenu la relation : $\mathbf{11a - 7b = 1}$. Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 11$ et $v = -7$, tels que $ua + vb = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $a = 7n + 2$ et $b = 11n + 3$ sont premiers entre eux.

2. Montrons que $\boldsymbol{a = 4n + 5}$ et $\boldsymbol{b = 5n + 6}$ sont premiers entre eux :

Les coefficients de *n* dans les expressions de *a* et de *b* sont, respectivement, 4 et 5. Ces deux entiers sont premiers entre eux, leur PPCM est égal à leur produit. Pour éliminer *n* entre *a* et *b*, nous allons multiplier *a* par 5, *b* par 4, puis nous ferons la différence.

$$\begin{cases} a = 4n + 5 \\ b = 5n + 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5a = 20n + 25 \\ 4b = 20n + 24 \end{cases} \Longrightarrow 5a - 4b = (20n + 25) - (20n + 24) = 1$$

Nous avons obtenu la relation : $\boldsymbol{5a - 4b = 1}$. Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 5$ et $v = -4$, tels que $ua + vb = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $a = 4n + 5$ et $b = 5n + 6$ sont premiers entre eux.

NB. Dans les questions 3 et 4, nous observons que *a* est égal à une expression du second degré en *n* alors que *b* est une fonction affine de *n*. La résolution consistera à rechercher, cette fois empiriquement, des combinaisons entières de *a* et de *b* permettant d'éliminer (au moins) le terme n^2. Il faut s'attendre à ce que le coefficient de *b* ne soit pas une constante mais soit plutôt une fonction affine de *n*.

3. Montrons que $\boldsymbol{a = n^2 + 1}$ et $\boldsymbol{b = n}$ sont premiers entre eux :

Vu que $b = n$, une expression de *a* en fonction de *n* et *b* est aussi bien : $a = n^2 + 1 = nb + 1$

Nous pouvons l'écrire ainsi : $a - nb = 1$ soit aussi bien $\boldsymbol{a + (-n) \times b = 1}$.

Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 1$ et $v = -n$, tels que $ua + vb = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $a = n^2 + 1$et $b = n$ sont premiers entre eux.

4. Montrons que $\boldsymbol{a = (n + 1)^2}$ et $\boldsymbol{b = n + 2}$ sont premiers entre eux :

Développons l'expression de *a* en fonction de *n* :

$a = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n \times (n + 2) + 1 = nb + 1$. L'expression de *a* en fonction de *b* est identique à celle que nous avons trouvée dans la question précédente.

Nous pouvons l'écrire pareillement : $\boldsymbol{a + (-n) \times b = 1}$.

Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 1$ et $v = -n$, tels que $ua + vb = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $a = (n + 1)^2$ et $b = n + 2$ sont premiers entre eux.