Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Bézout

04

Correction

Cet exercice propose la résolution d'une équation diophantienne de la forme $ux + vy = 1$ dans le cas où cette équation a une « solution évidente ». Dès lors, il n'est pas nécessaire de dissocier les résolutions des questions 1 et 2.

Rappelons l'énoncé du théorème de Gauss, utile dans la résolution de la question 3 :

Soit *a, b, c* trois entiers relatifs. Si *a* divise le produit *bc* et s'il est premier avec *b*, alors il divise *c*.

1 et 2. Faisons d'une pierre deux coups :

Saisissons l'opportunité d'une solution évidente : $34 = 2 \times 17 = 33 + 1.$ (!)

Ainsi nous disposons de l'égalité stratégique : $\mathbf{17 \times 2 - 33 = 1}$.

- Nous avons trouvé un couple d'entiers relatifs, le couple $(u = 2,\ v = -1)$, tel que : $17u + 33v = 1$. D'après le théorème de Bézout, 17 et 33 sont premiers entre eux (ce qui répond à la **question 1**).
- Nous avons par la même occasion trouvé un couple, le couple $(x_0 = 2,\ y_0 = 1)$, qui est solution particulière de l'équation (E) (ce qui répond à la **question 2**).

3. Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E). Confrontons l'équation (E) dont ce couple est solution avec l'égalité vérifiée par la solution particulière $(x_0 = 2,\ y_0 = 1)$ que nous avons trouvée :

$$\begin{cases} 17x - 33y = 1 \\ 17 \times 2 - 33 = 1 \end{cases}$$

Retranchons membre à membre : $17(x - 2) - 33(x - 1) = 0$

Nous en déduisons que :

Le couple $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si le couple $(X = x - 2,\ Y = y - 1)$ est solution de l'équation[1] : $17X - 33Y = 0$ $\quad$ (E_H)

Résolvons l'équation homogène (E_H) :

Cette équation s'écrit aussi bien : $17X = 33Y$. Puisque 17 divise le premier membre, il divise le second.

- 17 divise $33Y$.
- 17 est premier avec 33.

Nous pouvons appliquer le théorème de Gauss. 17 divise le produit $33Y$ et il est premier avec 33, donc il divise Y. Il existe un entier relatif k tel que : $Y = 17k$.

Remplaçons dans l'équation (E) Y par son expression en fonction du paramètre k.

L'équation (E_H) s'écrit désormais : $17X = 33 \times (17k) = 17 \times (33k)$. Nous en déduisons : $X = 33k$.

Si $(X,\ Y)$ est un couple solution de (E_H), alors il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} X = 33k \\ Y = 17k \end{cases}$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k : $17 \times (33k) - 33 \times (17k) = 561k - 561k = 0$, le couple $(33k,\ 17k)$ est solution de (E_H).

L'ensemble des solutions de (E_H) est l'ensemble $\{(33k,\ 17k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

Déduisons-en les solutions de (E) :

D'après l'équivalence obtenue au début de cette question, un couple $(x,\ y)$ est solution de (E) si et seulement si le couple $(X = x - 2,\ Y = y - 1)$ est solution de (E_H), donc si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que : $\begin{cases} x - 2 = 33k \\ y - 1 = 17k \end{cases}$ soit tel que $\begin{cases} x = 2 + 33k \\ y = 1 + 17k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble $\boldsymbol{S = \{(2 + 33k,\ 1 + 17k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

[1] Cette équation (E_H) s'appelle « l'équation homogène » associée à (E) (ou aussi parfois « l'équation sans second membre »). C'est pourquoi nous la notons, dans cet exercice, avec un indice « H ».