Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Bézout

03

Correction

Cet exercice propose des applications du théorème de Bézout, que nous rappelons :

Deux entiers relatifs *x* et *y* sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des entiers relatifs *u* et *v* tels que : $ux + vy = 1$.

1.a. Montrons que 24 et 13 sont premiers entre eux :

Mettons en œuvre l'algorithme d'Euclide.

Division numéro 1 : $24 = 1 \times 13 + 11$ donc $\text{PGCD}(24\,;13) = \text{PGCD}(13\,;11)$

Division numéro 2 : $13 = 1 \times 11 + 2$ donc $\text{PGCD}(13\,;11) = \text{PGCD}(11\,;\,2)$

Division numéro 3 : $11 = 5 \times 2 + 1$ donc $\text{PGCD}(11\,;2) = \text{PGCD}(2\,;\,1) = 1$

Par transitivité, $\text{PGCD}(24\,;13) = \text{PGCD}(2\,;1) = 1$

Le PGCD de 24 et de 13 étant égal à 1, les entiers 24 et 13 sont premiers entre eux.

NB. L'entier 1 étant un reste obtenu dans la suite des divisions successives de l'algorithme d'Euclide, il s'agit nécessairement du « dernier reste non nul ».

1.b. Trouvons deux entiers *u* et *v* tels que $24u + 13v = 1$:

Parallèlement aux divisions de l'algorithme d'Euclide précédent, écrivons chaque reste comme combinaison entière de 24 et de 13 (nous construisons ainsi « l'algorithme d'Euclide étendu »).

D'après la division numéro 1 : $11 = 24 - 13.$

D'après la division numéro 2 : $2 = 13 - 11 = 13 - (24 - 13) = 2 \times 13 - 24$

D'après la division numéro 3 :

$1 = 11 - 5 \times 2 = (24 - 13) - 5 \times (2 \times 13 - 24) = 6 \times 24 - 11 \times 13.$

Nous obtenons la relation : $24 \times 6 - 13 \times 11 = 1.$

Un couple (u, v) tel que $24u + 13v = 1$ est le couple $(6, -11)$.

2. Montrons que les deux entiers en jeu sont premiers entre eux :

Dans les exemples à traiter, notons *x* et *y* les deux entiers dépendant de *n* en jeu. Ils s'expriment dans chaque cas comme des fonctions affines à coefficients entiers de la variable *n*. Nous chercherons une relation indépendante de *n* entre ces deux entiers. Pour cela, si nous désignons par *a* et par *b* les coefficients de *n* dans les expressions de *x* et de *y*, nous pourrons utiliser le PPCM de *a* et de *b*.

2.a. Montrons que $x = 5n - 7$ et $y = 2n - 3$ sont premiers entre eux :

Les coefficients de *n* dans les expressions de *x* et de *y* sont, respectivement, $a = 5$ et $b = 2$. Ces deux entiers sont premiers entre eux, leur PPCM est égal à leur produit. Pour éliminer *n* entre *x* et *y*, nous allons multiplier *x* par 2, *y* par 5, puis nous ferons la différence.

$$\begin{cases} x = 5n - 7 \\ y = 2n - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 10n - 14 \\ 5y = 10n - 15 \end{cases} \Rightarrow 2x - 5y = (10n - 14) - (10n - 15) = 1$$

Nous avons obtenu la relation : $\mathbf{2x - 5y = 1}$. Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 2$ et $v = -5$, tels que $ux + vy = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $x = 5n - 7$ et $y = 2n - 3$ sont premiers entre eux.

2.b. Montrons que $x = 9n + 11$ et $y = 5n + 6$ sont premiers entre eux :

Les coefficients de *n* dans les expressions de *x* et de *y* sont, respectivement, $a = 9$ et $b = 5$. Ces deux entiers sont premiers entre eux, leur PPCM est égal à leur produit. Pour éliminer *n* entre *x* et *y*, nous allons multiplier *x* par 5, *y* par 9, puis nous ferons la différence.

$$\begin{cases} x = 9n + 11 \\ y = 5n + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 45n + 55 \\ 9y = 45n + 54 \end{cases} \Rightarrow 5x - 9y = (45n + 55) - (45n + 54) = 1$$

Nous avons obtenu la relation : $\mathbf{5x - 9y = 1}$. Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 5$ et $v = -9$, tels que $ux + vy = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $x = 9n + 11$ et $y = 5n + 6$ sont premiers entre eux.

2.c. Montrons que $x = 8n + 3$ et $y = 6n + 2$ sont premiers entre eux :

Les coefficients de *n* dans les expressions de *x* et de *y* sont $a = 8 = 2 \times 4$ et $b = 6 = 2 \times 3$. Ces deux entiers ont pour PGCD l'entier 2 et pour PPCM l'entier 24. Pour éliminer *n* entre *x* et *y*, nous allons multiplier *x* par 3, *y* par 4, puis nous ferons la différence.

$$\begin{cases} x = 8n + 3 \\ y = 6n + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 24n + 9 \\ 4y = 24n + 8 \end{cases} \Rightarrow 3x - 4y = (24n + 9) - (24n + 8) = 1$$

Nous avons obtenu la relation : $\mathbf{3x - 4y = 1}$. Nous avons donc trouvé deux entiers *u* et *v*, les entiers $u = 3$ et $v = -4$, tels que $ux + vy = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers $x = 8n + 3$ et $y = 6n + 2$ sont premiers entre eux.