Maths Expertes
Terminale

PGCD, Bézout & Gauss

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Bézout

02

Correction

Cet exercice a pour objectif de rechercher, sur quelques exemples, une combinaison entière $au + bv$ de deux entiers relatifs *a* et *b* égale à 1. Si cette recherche aboutit, elle démontre au passage que les entiers *a* et *b* sont des entiers premiers entre eux.

Cette recherche peut être assurée par « **l'algorithme d'Euclide étendu »**. Il s'agit de l'algorithme d'Euclide usuel, mais en outre, à chaque étape, l'algorithme « étendu » calcule une combinaison entière des deux nombres initiaux *a* et *b* égale au reste courant. En dernier lieu, l'algorithme donne une combinaison entière égale à leur PGCD (donc à 1 si et seulement si *a* et *b* sont premiers entre eux).

Considérons l'algorithme d'Euclide usuel appliqué à deux entiers $a > b > 0$:

- Division numéro 1 : $a = q_1 b + r_1$ donc $r_1 = a - q_1 b$
- Division numéro 2 : $b = q_2 r_1 + r_2$ donc $r_2 = b - q_2 r_1$
- ....
- Division numéro *k* : $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$ donc $r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1}$
- ....

Si l'on pose $r_j = u_j a + v_j b$ pour chaque indice *j*, nous avons lors de la division numéro *k* :

$r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1} = (u_{k-2} a + v_{k-2} b) - q_k (u_{k-1} a + v_{k-1} b)$ d'où les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_k = u_{k-2} - q_k u_{k-1} \\ v_k = v_{k-2} - q_k v_{k-1} \end{cases}$$

Ce sont ces relations de récurrence qu'il s'agit de mettre en œuvre.

Nous nous proposons ici d'utiliser une mouture Python de cet algorithme, nommée « **euclidetendu »** admettant deux arguments *a* et *b* entiers tels que $a > b > 0$, qui nous servira à traiter l'exercice.

Dans chaque question, nous exécuterons cet algorithme.

Il nous faudra adapter notre réponse aux circonstances de chaque équation, selon les signes des coefficients et les valeurs relatives de leurs valeurs absolues.

```
>>> def euclidetendu(a,b):
        x=a
        y=b
        s=1
        t=0
        u=0
        v=1
        n=1
        while y>0:
                r=x%y
                q=int((x-r)/y)
                if n>1:
                        print("Combinaison de ",a,"et",b,"égale au reste :")
                print(y,"=(",u,")x",a,"+(",v,")x",b)
                print("Division numéro",n,":")
                print(x,"=",q,"x",y,"+",r)
                n=n+1
                c=u
                d=v
                u=s-q*u
                v=t-q*v
                s=c
                t=d
                x=y
                y=r
```

1. Trouvons une solution particulière de l'équation $11x + 19y = 1$:

Exécutons « **euclidetendu** » avec $a = 19$; $b = 11$.

Nous obtenons la combinaison entière :

$(-4) \times 19 + 7 \times 11 = 1.$

Une solution particulière de l'équation est le couple $(7\ ;\ -4)$.

```
>>> euclidetendu(19,11)
11 =( 0 )x 19 +( 1 )x 11
Division numéro 1 :
19 = 1 x 11 + 8
Combinaison de  19 et 11 égale au reste :
8 =( 1 )x 19 +( -1 )x 11
Division numéro 2 :
11 = 1 x 8 + 3
Combinaison de  19 et 11 égale au reste :
3 =( -1 )x 19 +( 2 )x 11
Division numéro 3 :
8 = 2 x 3 + 2
Combinaison de  19 et 11 égale au reste :
2 =( 3 )x 19 +( -5 )x 11
Division numéro 4 :
3 = 1 x 2 + 1
Combinaison de  19 et 11 égale au reste :
1 =( -4 )x 19 +( 7 )x 11
Division numéro 5 :
2 = 2 x 1 + 0
```

2. Trouvons une solution particulière de l'équation $28x - 33y = 1$:

Exécutons « **euclidetendu** » avec $a = 33,\ b = 28$. Nous obtenons la combinaison entière :

$(-11) \times 33 + 13 \times 28 = 1.$

Une solution particulière de l'équation est le couple $(13\ ;\ 11)$

```
>>> euclidetendu(33,28)
28 =( 0 )x 33 +( 1 )x 28
Division numéro 1 :
33 = 1 x 28 + 5
Combinaison de  33 et 28 égale au reste :
5 =( 1 )x 33 +( -1 )x 28
Division numéro 2 :
28 = 5 x 5 + 3
Combinaison de  33 et 28 égale au reste :
3 =( -5 )x 33 +( 6 )x 28
Division numéro 3 :
5 = 1 x 3 + 2
Combinaison de  33 et 28 égale au reste :
2 =( 6 )x 33 +( -7 )x 28
Division numéro 4 :
3 = 1 x 2 + 1
Combinaison de  33 et 28 égale au reste :
1 =( -11 )x 33 +( 13 )x 28
Division numéro 5 :
2 = 2 x 1 + 0
```

3. Trouvons une solution particulière de l'équation $23x + 32y = 1$:

Exécutons « **euclidetendu** » avec $a = 32\ ;\ b = 23$.

Nous obtenons la combinaison entière :

$(-5) \times 32 + 7 \times 23 = 1.$

Une solution particulière de l'équation est le couple $(7\ ;\ -5)$

```
>>> euclidetendu(32,23)
23 =( 0 )x 32 +( 1 )x 23
Division numéro 1 :
32 = 1 x 23 + 9
Combinaison de  32 et 23 égale au reste :
9 =( 1 )x 32 +( -1 )x 23
Division numéro 2 :
23 = 2 x 9 + 5
Combinaison de  32 et 23 égale au reste :
5 =( -2 )x 32 +( 3 )x 23
Division numéro 3 :
9 = 1 x 5 + 4
Combinaison de  32 et 23 égale au reste :
4 =( 3 )x 32 +( -4 )x 23
Division numéro 4 :
5 = 1 x 4 + 1
Combinaison de  32 et 23 égale au reste :
1 =( -5 )x 32 +( 7 )x 23
Division numéro 5 :
4 = 4 x 1 + 0
```

4. Trouvons une solution particulière de l'équation $1274x + 275y = 1$:

Exécutons « **euclidetendu** » avec $a = 1274$; $b = 275$.

Nous obtenons la combinaison entière :

$49 \times 1274 - 227 \times 275 = 1.$

Une solution particulière de l'équation est le couple $(49\ ;\ -227)$.

```
>>> euclidetendu(1274,275)
275 =( 0 )x 1274 +( 1 )x 275
Division numéro 1 :
1274 = 4 x 275 + 174
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
174 =( 1 )x 1274 +( -4 )x 275
Division numéro 2 :
275 = 1 x 174 + 101
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
101 =( -1 )x 1274 +( 5 )x 275
Division numéro 3 :
174 = 1 x 101 + 73
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
73 =( 2 )x 1274 +( -9 )x 275
Division numéro 4 :
101 = 1 x 73 + 28
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
28 =( -3 )x 1274 +( 14 )x 275
Division numéro 5 :
73 = 2 x 28 + 17
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
17 =( 8 )x 1274 +( -37 )x 275
Division numéro 6 :
28 = 1 x 17 + 11
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
11 =( -11 )x 1274 +( 51 )x 275
Division numéro 7 :
17 = 1 x 11 + 6
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
6 =( 19 )x 1274 +( -88 )x 275
Division numéro 8 :
11 = 1 x 6 + 5
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
5 =( -30 )x 1274 +( 139 )x 275
Division numéro 9 :
6 = 1 x 5 + 1
Combinaison de  1274 et 275 égale au reste :
1 =( 49 )x 1274 +( -227 )x 275
Division numéro 10 :
5 = 5 x 1 + 0
```