Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Petit théorème de Fermat

01

Correction

NB. Enoncé du petit théorème de Fermat : Si *P* est un nombre premier et si *a* est un entier non divisible par *P*, alors $a^{P-1} \equiv 1 \ \ [P]$.

Rappelons aussi que sont équivalentes les formulations :

- *a* est multiple de *b*.
- *a* est divisible par *b*.
- $a \equiv 0 \ \ [b]$.

1. Montrons que pour tout entier naturel *n*, $3^{6n} - 1$ est divisible par 7 :

Justifions d'abord que : $3^6 \equiv 1 \ \ [7]$.

- 7 est un nombre premier.
- Le nombre entier 3 n'est pas divisible par 7.

Nous pouvons appliquer le petit théorème de Fermat avec $P = 7$; $a = 3$; $P - 1 = 6$.

D'après le petit théorème de Fermat : $3^6 \equiv 1 \ \ [7]$

Pour tout entier naturel *n*, nous obtenons une nouvelle congruence modulo 7 en élevant chaque membre de cette congruence à la puissance *n* : $(3^6)^n \equiv 1^{\,n} \ [7]$

Or, 1 est invariant par élévation à une puissance. Nous obtenons : $(3^6)^n \equiv 1 \ \ [7]$ soit, aussi bien :

$$3^{6n} - 1 \equiv 0 \ \ [7].$$

Nous pouvons conclure : Pour tout entier naturel *n*, $3^{6n} - 1$ est divisible par 7.

2. Montrons que si *p* est un nombre premier distinct de 3, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par *p* :

Pour tout entier naturel *n* : $3^{n+p} - 3^{n+1} = 3^{n+1} \times (3^{p-1} - 1)$

Considérons le nombre $A = 3^{p-1} - 1$.

- *p* est par hypothèse un nombre premier.
- 3 et *p* sont des nombres premiers distincts, donc 3 n'est pas divisible par *p*.

Nous pouvons appliquer le petit théorème de Fermat avec $a = 3$ et avec le nombre premier *p*.

D'après le petit théorème de Fermat : $3^{p-1} \equiv 1 \ [p]$ ou, ce qui revient au même, $A \equiv 0 \ [p]$.

Nous en déduisons : $3^{n+1} \times A \equiv 0 \ [p]$, c'est-à-dire :

$$3^{n+p} - 3^{n+1} \equiv 0 \ [p].$$

Nous pouvons conclure : Pour tout entier naturel *n*, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par *p*.

En complément Freemaths, une illustration avec TI-Nspire :

L'algorithme « diviparp » a pour argument un nombre premier *p* et affiche les valeurs de $3^{n+p} - 3^{n+1}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et les décompose en produit de facteurs premiers.

Nous avons exécuté l'algorithme pour $p = 5$ et $p = 7$. Nous observons, entre autres facteurs, respectivement le facteur 5 puis le facteur 7 dans les décompositions.