Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombres premiers

05

Correction

Cet exercice porte sur la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel $N \geq 2$.

Nous savons qu'il existe un ensemble unique $\{(p_1,\ \alpha_1), (p_2,\ \alpha_2), \dots, (p_m,\ \alpha_m)\}$ tel que :

- Les p_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ sont des nombres premiers distincts.
- Les α_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ sont des entiers strictement positifs.
- $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{\alpha_m}$

1.a et b. Procédons aux vérifications demandées :

Automatisons les calculs. La fonction f calcule les valeurs de $4p^2 + 1$ et de $6p^2 + 1$. La fonction g indique si les nombres obtenus sont premiers (réponse « true ») ou non (réponse « false »).	Define $f(p)=\{4\cdot p^2+1, 6\cdot p^2+1\}$	*Terminé*
	Define $g(p)=\{\text{isPrime}(4\cdot p^2+1), \text{isPrime}(6\cdot p^2+1)\}$	*Terminé*
	$f(2)$	$\{17,25\}$
	$g(2)$	$\{\text{true},\text{false}\}$
	$f(3)$	$\{37,55\}$
	$g(3)$	$\{\text{true},\text{false}\}$
	$f(5)$	$\{101,151\}$
	$g(5)$	$\{\text{true},\text{true}\}$

Nous constatons que pour $p = 2$ et $p = 3$, le nombre $6p^2 + 1$ n'est pas un nombre premier (c'est chaque fois un multiple de 5 distinct de 5).

En revanche pour $p = 5$, les nombres $4p^2 + 1$ et $6p^2 + 1$ sont égaux respectivement à 101 et à 151 qui sont deux nombres premiers.

2 et 3 ne conviennent pas, tandis que 5 vérifie les conditions imposées.

2. a et b. Démontrons chacune des deux congruences modulo 5 :

Nous savons que deux entiers *a* et *b* sont congrus modulo 5 si et seulement si leur différence est un multiple de 5. Nous ferons dans chaque cas la différence des deux nombres en jeu et nous vérifierons si, oui ou non, cette différence est un multiple de 5.

2.a. Justifions la congruence $4p^2 + 1 \equiv -\left(p^2 - 1\right)\ [5]$:

Nous devons étudier la différence : $4p^2 + 1 - \left(-(p^2 - 1)\right)$.

$$4p^2 + 1 - \left(-(p^2 - 1)\right) = 4p^2 + 1 + p^2 - 1 = 5p^2$$

Cette différence est un multiple de 5, donc :

La congruence $4p^2 + 1 \equiv -(p^2 - 1)\ \ [5]$ est vérifiée.

2.b. Justifions la congruence $6p^2 + 1 \equiv (p - 2)(p - 3)\ \ [5]$:

Nous devons étudier la différence : $6p^2 + 1 - \left((p - 2)(p - 3)\right)$.

$6p^2 + 1 - \left((p - 2)(p - 3)\right) = 6p^2 + 1 - (p^2 - 5p + 6) = 5p^2 + 5p - 5$.

Nous obtenons : $6p^2 + 1 - \left((p - 2)(p - 3)\right) = 5 \times (p^2 + p - 1)$

Cette différence est un multiple de 5, donc :

La congruence $6p^2 + 1 \equiv (p - 2)(p - 3)\ \ [5]$ est vérifiée.

3. Déduisons-en que : $p \times (4p^2 + 1) \times (6p^2 + 1) \equiv 0\ \ [5]$:

Nous savons que, en raison de la compatibilité des congruences avec la multiplication, on obtient une nouvelle congruence modulo 5 en multipliant membre à membre deux congruences modulo 5.

Multiplions membre à membre les deux congruences obtenues aux questions 2.a et 2.b.

Nous obtenons : $(4p^2 + 1) \times (6p^2 + 1) \equiv -(p^2 - 1) \times (p - 2) \times (p - 3)\ \ [5]$.

Si nous multiplions par *p* chaque membre de cette congruence, nous obtenons une nouvelle congruence modulo 5 : $p(4p^2 + 1) \times (6p^2 + 1) \equiv -p \times (p^2 - 1) \times (p - 2) \times (p - 3)\ \ [5]$.

Factorisons l'expression du second membre :

$p(4p^2 + 1) \times (6p^2 + 1) \equiv -p \times (p - 1) \times (p + 1) \times (p - 2) \times (p - 3)\ \ [5]$

Le produit figurant au second membre est l'opposé du produit de cinq entiers consécutifs, à savoir par ordre croissant les entiers : $p - 3,\ p - 2,\ p - 1,\ p,\ p + 1$.

Or, dans toute suite de cinq entiers consécutifs, il y a toujours[1] exactement un multiple de 5. Le produit de ces cinq nombres est donc toujours un multiple de 5.

Ce produit $-p \times (p-1) \times (p+1) \times (p-2) \times (p-3)$ est toujours congru à 0 modulo 5.

Par transitivité, nous obtenons : $p(4p^2+1) \times (6p^2+1) \equiv 0 \quad [5]$

4. Prouvons que $(4p^2+1)$ ou $(6p^2+1)$ est composé :

Nous avons prouvé que la congruence $p(4p^2+1) \times (6p^2+1) \equiv 0 \quad [5]$ est vérifiée, donc le produit $p(4p^2+1) \times (6p^2+1)$ est un multiple de 5.

5 étant un nombre premier, s'il divise le produit $p(4p^2+1) \times (6p^2+1)$, alors il divise au moins l'un des facteurs de ce produit.

Par hypothèse, depuis la **question 2**, *p* est supposé être un nombre premier > 5, donc un nombre premier distinct de 5 : le nombre 5 ne divise pas *p*.

Nous en concluons que 5 divise l'un des deux autres facteurs, $(4p^2+1)$ ou $(6p^2+1)$.

En outre, l'hypothèse $p > 5$ implique que $(6p^2+1) > (4p^2+1) > 4 \times 25 + 1 = 101$. Que 5 divise le facteur $(4p^2+1)$ ou bien le facteur $(6p^2+1)$, il le divise strictement, aucun de ces deux nombres n'est 5 lui-même.

Celui des deux facteurs que l'entier 5 divise est un multiple de 5 autre que 5, il est composé.

L'un ou l'autre des entiers $(4p^2+1)$ ou $(6p^2+1)$ est un entier composé.

5. Concluons :

En fin de compte, ni 2, ni 3, ni aucun nombre premier > 5 ne satisfait les conditions de l'exercice.

Le nombre premier $p = 5$ est l'unique nombre premier tel que $(4p^2+1)$ et $(6p^2+1)$ sont eux aussi des nombres premiers.

[1] De façon générale, soit $n \geq 2$. Dans toute suite de *n* entiers consécutifs, il y a toujours un et un seul multiple de *n*. En effet, ces *n* entiers consécutifs sont congrus modulo *n* aux entiers $0, 1, 2, \dots, n-1$, dans un ordre ou dans un autre (l'ordre de congruence peut permuter circulairement). Un et un seul des *n* entiers est congru à 0 modulo *n*. En particulier, dans une suite de 5 entiers consécutifs, il y a toujours exactement un multiple de 5.