Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombres premiers

04

Correction

Cet exercice porte sur la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel $N \geq 2$.

Nous savons qu'il existe un ensemble unique $\{(p_1,\ \alpha_1), (p_2,\ \alpha_2), \dots, (p_m,\ \alpha_m)\}$ tel que :

- Les p_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ sont des nombres premiers distincts.
- Les α_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ sont des entiers strictement positifs.
- $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{\alpha_m}$

NB. Dans la correction de cet exercice, chaque fois qu'il est question de « décomposition », il s'agit de « décomposition en produit de facteurs premiers ».

1.a. Enonçons une condition sur les exposants des facteurs premiers d'un carré :

Soit $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{\alpha_m}$ un nombre entier au moins égal à 2 avec sa décomposition. Alors : $N^2 = ({p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{\alpha_m})^2 = {p_1}^{2\alpha_1} \times {p_2}^{2\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{2\alpha_m}$

Les exposants des facteurs premiers du carré d'un nombre entier sont tous des nombres pairs strictement positifs.

Réciproquement, soit $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{\alpha_m}$ un entier tel que tous les exposants de ses facteurs premiers sont des nombres pairs strictement positifs. Pour chaque indice $i = 1, 2, \dots, m$, il existe un nombre entier strictement positif β_i tel que : $\alpha_i = 2\beta_i$.

Alors : $N = {p_1}^{2\beta_1} \times {p_2}^{2\beta_2} \times \dots \times {p_m}^{2\beta_m} = \left({p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times \dots \times {p_m}^{\beta_m}\right)^2$.

L'entier N est le carré du nombre entier $R = {p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times \dots \times {p_m}^{\beta_m}$

Nous pouvons énoncer :

Un entier $N \geq 2$ est un carré si et seulement si les exposants des facteurs premiers de sa décomposition sont tous des nombres pairs strictement positifs.

1.b. Cherchons les carrés divisibles par 56 qui s'écrivent avec trois chiffres :

Décomposons 56 en produit de facteurs premiers : $56 = 8 \times 7 = 2^3 \times 7$.

Dans la décomposition d'un carré divisible par 56, les nombres premiers 2 et 3 doivent y figurer avec des exposants pairs égaux au moins à 3 et à 1 respectivement. Ces exposants pairs sont donc égaux, au minimum, à 4 et à 2 respectivement.

Un carré divisible par 56 doit, en fait, être divisible par le nombre $2^4 \times 7^2 = 784$.

Il n'y a qu'un nombre qui soit un carré divisible par 784 et qui s'écrit avec trois chiffres, c'est 784 lui-même.

784 est l'unique carré s'écrivant avec trois chiffres et divisible par 56.

(784 est le carré de 28).

NB. Le carré suivant, divisible par 56, serait $2^6 \times 7^2 = 3136 = 56^2$ qui s'écrit avec quatre chiffres.

2. Cherchons les diviseurs de 84 et utilisons-les pour résoudre une équation :

Cherchons les diviseurs de 84 :

Considérons la décomposition de 84 : $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

Cette décomposition permet de caractériser les entiers naturels qui divisent 84 : ce sont les entiers de la forme $2^a \times 3^b \times 7^c$ où $0 \leq a \leq 2$; $0 \leq b \leq 1$; $0 \leq c \leq 1$

L'exposant *a* pouvant prendre trois valeurs, 0 , 1 ou 2, et les exposants *b* et *c* deux valeurs, 0 ou 1, nous nous attendons à trouver $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs de 84.

Dressons-en la liste, rangée par facteurs premiers : $\{1, 2, 4, 3, 6, 12, 7, 14, 28, 21, 42, 84\}$

Et maintenant la même liste des diviseurs de 84, mais ordonnée par ordre croissant :

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$$

Résolvons dans $\mathbb{N}$ l'équation $\boldsymbol{x(x+1)(2x+1) = 84}$:

L'inconnue x étant un entier naturel, les trois facteurs x ; $(x+1)$; $(2x+1)$ sont des entiers naturels qui divisent 84. De ce fait, ces entiers doivent vérifier un certain nombre de conditions.

- x ; $(x+1)$; $(2x+1)$ figurent tous les trois dans la liste des 12 diviseurs de 84.
- x et $(x+1)$ sont deux entiers consécutifs.
- $(2x+1)$ est un diviseur impair de 84
- Le produit des trois nombres est égal à 84.

En examinant la liste des diviseurs de 84, nous constatons que, *a priori*, *x* peut être égal à 1, 2 ou 3 (car alors son successeur est lui aussi dans la liste des diviseurs de 84) à l'exclusion de tout autre entier. Il reste à voir si les autres conditions sont vérifiées ou non.

- 1 ne convient pas car $1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1) = 6 \neq 84$
- 2 ne convient pas car $(2 \times 2 + 1) = 5$ n'est pas dans la liste des diviseurs de 84.
- 3 convient car nous vérifions que : $3 \times (3+1) \times (2 \times 3 + 1) = 3 \times 4 \times 7 = 84$

L'équation $x(x+1)(2x+1) = 84$ admet dans $\mathbb{N}$ une unique solution, la solution $x = 3$.