Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombres premiers

03

Correction

Partie A

1. Décomposons en produit de facteurs premiers les nombres 6468 et 16380 :

NB. Décomposons « à la main » ces deux nombres en essayant cependant d'accélérer les procédures.

Décomposons 6468 :

Nous constatons facilement que les critères de divisibilité par 4, par 3 et par 11 sont vérifiés pour cet entier. En conséquence, 6468 est divisible par $2^2 \times 3 \times 11 = 132$.

Le calcul montre que : $\frac{6468}{132} = 49 = 7^2$.

Nous en déduisons la décomposition :

$$6468 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 11$$

.

Décomposons 16380 :

Nous constatons facilement que les critères de divisibilité par 4, par 9 et par 5 sont vérifiés pour cet entier. En conséquence, 16380 est divisible par $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

Le calcul montre que $\frac{16380}{180} = 91 = 7 \times 13$.

Nous en déduisons la décomposition :

$$16380 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

NB. Il n'y a pas lieu de développer davantage une méthode de décomposition « à la main » devenue quelque peu obsolète.

2. Déduisons-en le PGCD de 6468 et de 16380 :

NB. Le PGCD de deux nombres entiers dont on connaît les décompositions en produit de facteurs premiers se calcule ainsi :

La décomposition en produit de facteurs premiers du PGCD de deux entiers est le produit des nombres premiers qui sont communs aux deux décompositions, affectés du plus petit des exposants.

La question 1 a montré que les décompositions en produit de facteurs premiers des deux entiers en jeu sont : $6468 = 2^2 \times 3 \times 7^2 \times 11$ et $16380 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$.

Les nombres premiers communs aux deux décompositions sont les suivants :

- 2, avec l'exposant 2 dans chaque décomposition.
- 3, avec les exposants 1 et 2 respectivement (nous retenons le plus petit 1).
- 7, avec les exposants 2 et 1 respectivement (nous retenons le plus petit 1).

La décomposition en produit de facteurs du PGCD de 6468 et de 16380 est $2^2 \times 3 \times 7$.

$$\mathrm{PGCD}(6468{,}16380) = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$$

Partie B

1.a. Calculons le PGCD de 8316 et 5670 à l'aide de leurs décompositions :

En pratique, la fonction « factor » d'une calculatrice décompose très bien à notre place, il n'y a aucune raison de s'en priver. Tous les résultats de l'exercice relatifs aux décompositions en produit de facteurs premiers sont affichés ci-contre. Nous y lisons notamment les décompositions de 8316 et 5670.	factor(6468) $2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11$ factor(16380) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ factor(8316) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ factor(5670) $2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ factor(gcd(6468,16380)) $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ factor(gcd(8316,5670)) $2 \cdot 3^3 \cdot 7$

.

Les nombres premiers communs aux décompositions 8316 et 5670 sont 2, 3 et 7 et les plus petits exposants sont respectivement 1, 3 et 1. Nous en déduisons :

$$\mathrm{PGCD}(8316{,}5670) = 2 \times 3^3 \times 7 = 378$$

1.b. Calculons le PGCD de 8316 et 5670 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

NB. L'algorithme d'Euclide est basé sur le résultat suivant :

- Soit *a* et *b* deux entiers naturels tels que $a > b$ et soit $\begin{cases} a = q \times b + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$ la division euclidienne de *a* par *b*. Alors : $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b,\ r)$.
- Si $r = 0$, $\mathrm{PGCD}(a, b) = b$, sinon on peut réitérer l'opération.

Cette question nous donne l'occasion de proposer une mouture de l'algorithme d'Euclide avec Python. Nous choisissons une mouture qui a l'avantage d'afficher « en extension » les divisions euclidiennes successives participant à cet algorithme.

```
>>> def euclide(a,b):
        while b>0 :
                u=a
                v=b
                b=u%v
                q=int((u-b)/v)
                a=v
                print(u,"=",q,"*",a,"+",b)
        print("le PGCD est égal à",a)
```

```
>>> euclide(8316,5670)
8316 = 1 * 5670 + 2646
5670 = 2 * 2646 + 378
2646 = 7 * 378 + 0
le PGCD est égal à 378
```

```
>>> euclide(16380,6468)
16380 = 2 * 6468 + 3444
6468 = 1 * 3444 + 3024
3444 = 1 * 3024 + 420
3024 = 7 * 420 + 84
420 = 5 * 84 + 0
le PGCD est égal à 84
```

2. Dissertons à propos de la méthode « la plus rapide » :

En pratique, tout dépend des moyens dont nous disposons…

En théorie, la méthode basée sur les décompositions en produits de facteurs premiers nécessite d'abord de disposer d'une liste de nombres premiers « suffisante » puis de déterminer les décompositions des entiers en jeu, ce qui peut s'avérer problématique pour de grands nombres. Cette méthode, dépendante des circonstances, n'est pas universelle. En revanche, l'algorithme d'Euclide est universel, il s'applique quels que soient les nombres entiers *a* et *b*. Il s'agit en ce sens de la méthode la plus « rapide ». (Avec l'algorithme d'Euclide, nous avons d'ailleurs obtenu le PGCD de 8316 et 5670 « en trois coups de cuillère à pot » !)

NB. Le **théorème de Lamé** (voir Wikipedia) nous donne une majoration du nombre d'opérations : « *Le nombre de divisions euclidiennes nécessaires pour obtenir le PGCD de deux entiers naturels non nuls, en appliquant l'algorithme d'Euclide, est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffres servant à écrire le plus petit des deux nombres* ».