

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Nombres Premiers



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombres premiers

02

Correction

NB. Nous aurons besoin dans notre résolution de l'implication suivante :

« Si la somme de deux nombres entiers est un nombre impair, alors ces deux nombres sont de parité différente, l'un est pair et l'autre est impair ».

En effet, la somme de deux nombres de même parité (tous deux pairs ou tous deux impairs) est un nombre pair. L'implication dont nous aurons besoin en est l'implication contraposée.

Soit n un entier tel que $n \geq 1$. Emettons l'hypothèse que le nombre $A = 30n + 7$ est la somme de deux nombres premiers et étudions quelques conséquences de cette hypothèse.

- **Montrons que l'un des deux nombres premiers est nécessairement le nombre 2 :**

Le nombre A est la somme du nombre pair $30n$ et du nombre impair 7. Le nombre A est donc un nombre impair. D'après l'implication rappelée en préambule, si le nombre impair A est somme de deux nombres entiers, alors l'un des deux nombres est pair et l'autre est impair.

Or, il n'existe qu'un seul nombre premier pair, c'est le nombre premier 2.

Nécessairement, 2 est l'un des deux nombres premiers dont A est la somme.

- **Montrons que, sous notre hypothèse, nous aboutissons à une contradiction :**

Soit p l'autre nombre premier dont la somme avec 2 est censée être égale à A .

Nous avons la relation : $30n + 7 = p + 2$, d'où nous déduisons que $p = (30n + 7) - 2 = 30n + 5$.

Nous obtenons l'expression de p suivante :

$$p = 5 \times (6n + 1)$$

Or, n est dans cet exercice un entier strictement positif (hypothèse « $n \geq 1$ »). Le nombre $6n + 1$ est un entier au moins égal à 7 et le produit $5 \times (6n + 1)$ est par conséquent un nombre entier composé.

Pour tout entier $n \geq 1$, et compte tenu de l'égalité $p = 5 \times (6n + 1)$, nous aboutissons à la contradiction suivante :

- p est un nombre premier.
- $5 \times (6n + 1)$ est un nombre composé .

• **Concluons :**

Pour tout entier $n \geq 1$, l'hypothèse : « le nombre $A = 30n + 7$ est la somme de deux nombres premiers » aboutit à une contradiction. Cette hypothèse doit être rejetée.

Nous devons tenir pour vraie la propriété contraire.

Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre $A = 30n + 7$ n'est pas la somme de deux nombres premiers.