Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombres premiers

10

Correction

La factorielle de 1000 est le produit de tous les entiers de 1 à 1000.

NB. Dans cette correction, lorsque nous parlons de « décomposition », il s'agit toujours de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier.

1. Montrons qu'il existe *p, q* et *N* premier avec 10 tels que $1000! = 2^p \times 5^q \times N$:

NB. Précisons un petit peu l'aspect de la décomposition de la factorielle de 1000.

Tous les nombres premiers inférieurs à 1000 figurent dans cette décomposition puisqu'ils sont tous facteurs dans le produit des entiers de 1 à 1000. En revanche, aucun nombre premier plus grand que 1000 ne figure dans cette décomposition puisqu'un tel nombre premier est premier avec tous les entiers plus petits que lui, donc avec tous les entiers de 1 à 1000, ainsi qu'avec leur produit.

Les facteurs premiers figurant dans la décomposition de 1000 ! forment, paraît-il, un ensemble $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots, 991, 997\}$ de 168 éléments (selon Wikipedia).

Désignons par *p* (respectivement *q*) l'exposant de 2 (respectivement de 5) dans la décomposition de la factorielle de 1000. Ces exposants sont strictement positifs puisque cette factorielle est multiple de 2 et de 5.

Désignons par *N* le produit de tous les autres termes de la décomposition (concernant les facteurs premiers 3, 7, 11, …, 991, 997 autres que 2 et 5). Les nombres premiers 2 et 5 ne figurant pas dans la décomposition de *N*, cet entier *N* est premier avec tout entier de la forme $2^a \times 5^b$, en particulier avec 10.

Il existe des entiers strictement positifs *p, q* et un entier *N* premier avec 10 tels que :

$$1000! = 2^p \times 5^q \times N$$

2.a Déterminons combien il y a de nombres ≤ 1000 dont 5 est un facteur premier :

NB. Nous allons compter successivement les nombres divisibles par 5, par $25 = 5^2$, par $125 = 5^3$ et par $625 = 5^4$ qui sont inférieurs ou égaux à 1000. Il n'y en a aucun qui soit inférieur ou égal à 1000 et divisible par une puissance de 5 plus grande.

Comptons les nombres divisibles par 5 :

Considérons la division euclidienne : $1000 = 200 \times 5$. Si elle indique que 1000 est un multiple de 200, elle indique par la même occasion qu'il y a 200 multiples non nuls de 5 qui sont inférieurs ou égaux à 1000.

Il y a 200 nombres divisibles par 5 qui appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \dots, 999, 1000\}$.

Comptons les nombres divisibles par 5^2 :

De même, la division euclidienne : $1000 = 40 \times 25$ indique par qu'il y a 40 multiples non nuls de $25 = 5^2$ qui sont inférieurs ou égaux à 1000.

Il y a 40 nombres divisibles par 5^2 qui appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \dots, 999, 1000\}$.

Comptons les nombres divisibles par 5^3 :

La division euclidienne : $1000 = 8 \times 125$ indique qu'il y a 8 multiples non nuls de $125 = 5^3$ qui sont inférieurs ou égaux à 1000.

Il y a 8 nombres divisibles par 5^3 qui appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \dots, 999, 1000\}$.

Comptons les nombres divisibles par 5^4 :

La division euclidienne : $1000 = 1 \times 625 + 375$ indique qu'il y a un seul multiple non nul du nombre $625 = 5^4$ qui est inférieur ou égal à 1000 (c'est 625 lui-même).

Il y a un seul nombre divisible par 5^4 qui appartient à l'ensemble $\{1, 2, \dots, 999, 1000\}$.

2.b. Déduisons-en la valeur de l'exposant *q* :

Les ensembles de nombres divisibles par 5, 25, 125 et 625 sont des ensembles emboîtés, chacun contient le suivant. Parmi les 200 nombres divisibles par 5, il y a les 40 qui sont divisibles par 25 ; parmi ces 40, il y a les 8 qui sont divisibles par 125, et parmi ces 8, il y a l'entier 625. Tentons de former avec ces ensembles des ensembles disjoints en les « déboîtant ».

Nous en déduisons que dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 999, 1000\}$, il y a :

- Un entier divisible par 5^4.
- 7 $(= 8 - 1)$ entiers divisibles par 5^3 mais non par 5^4.
- 32 $(= 40 - 8)$ entiers divisibles par 5^2 mais non par 5^3.
- 160 $(= 200 - 40)$ entiers divisibles par 5 mais non par 5^2.

Les sous-ensembles que nous avons ainsi constitués sont maintenant disjoints. Nous pouvons dénombrer les facteurs 5 en considérant tour à tour les entiers appartenant à chacun de ces sous-ensembles. Selon le sous-ensemble d'appartenance, un entier génèrera 4, 3, 2 ou une seule fois le facteur 5.

Le nombre de fois que le facteur 5 figure dans la factorielle de 1000 est ainsi égal à :

$$1 \times 4 + 7 \times 3 + 32 \times 2 + 160 \times 1 = 4 + 21 + 64 + 160 = 249.$$

Dans la décomposition de la factorielle de 1000, l'exposant q du nombre premier 5 est égal à 249.

3. Montrons que $p > q$ et déduisons-en le nombre de zéros finissant l'écriture de 1000 ! :

La division euclidienne $1000 = 500 \times 2$ indique qu'il y a 500 nombres divisibles par 2 dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 999, 1000\}$. Le facteur 2 figure au moins 500 fois dans la factorielle de 1000 (en fait beaucoup plus de fois car parmi ces 500 nombres, il y a ceux qui sont divisibles par 4, par 8, …).

Nous pouvons affirmer que $p > 500 > q$.

Nous en déduisons que : $1000! = (2^{249} \times 5^{249}) \times 2^{p-249} \times N = 10^{249} \times 2^{p-249} \times N$

La factorielle de 1000 est le produit de la puissance 249ème de 10 par un nombre qui n'est pas divisible par 10 (puisqu'il n'est pas divisible par 5), le nombre $2^{p-249} \times N$.

L'écriture décimale de ce nombre non divisible par 10 ne se termine pas par un zéro ; dans la factorielle de 1000, le chiffre relatif à la puissance 250ème de 10 n'est plus le chiffre zéro.

L'écriture décimale de la factorielle de 1000 se termine par 249 zéros.

NB. Le nombre de zéros qui terminent l'écriture de la factorielle de 1000 est égal à l'exposant de 5 dans sa décomposition.