Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombre de diviseurs

06

Correction

NB. L'énoncé définit $a = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ et $b = {p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times \ldots \times {p_m}^{\beta_m}$ où les p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des bien nombres premiers distincts mais où les α_i comme les β_i sont des « entiers naturels ». Ces décompositions ne sont donc pas canoniques, il se peut, selon les hypothèses de l'énoncé, que certains facteurs premiers soient affectés d'un exposant nul.

1. Montrons que *a* et *a*^{2} ont les mêmes facteurs premiers :

NB. Dans cette question, nous supposerons que les entiers α_i sont tous strictement positifs (alors que dans l'énoncé ils sont « naturels ») quitte à supposer évacués de l'écriture les nombres premiers à exposant nul. Ainsi, dans cette question, nous travaillerons avec la décomposition canonique en produit de facteurs premiers.

Soit donc a un entier naturel ≥ 2 et $a = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers, où les p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres premiers distincts et les α_i sont tous des entiers strictement positifs.

Alors : $a^2 = ({p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m})^2$.

En raison des propriétés usuelles de la multiplication des entiers (« le carré d'un produit est égal au produit des carrés ») : $a^2 = ({p_1}^{\alpha_1})^2 \times ({p_2}^{\alpha_2})^2 \times \ldots \times ({p_m}^{\alpha_m})^2$.

En raison des propriétés des exposants, $({p_i}^{\alpha_i})^2 = {p_i}^{2\alpha_i}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$.

Nous obtenons : $a^2 = {p_1}^{2\alpha_1} \times {p_2}^{2\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{2\alpha_m}$. Le second membre est une authentique décomposition en produit de facteurs premiers car les p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres premiers distincts et les $2\alpha_i$ sont tous des entiers strictement positifs.

En raison de l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier, nous avons obtenu de cette façon la décomposition en produit de facteurs premiers de a^2.

Nous pouvons conclure :

- Les facteurs premiers de *a* et de a^2 sont les mêmes.
- Les exposants des facteurs premiers de *a* sont doublés dans la décomposition de a^2.

2. Montrons que si *P* divise *a*², alors il divise *a* et *P*² divise *a*² :

Nous savons que si un nombre premier *P* divise un produit de facteurs, alors il divise au moins l'un des facteurs.

Soit *P* un nombre premier qui divise $a^2 = a \times a$.

Ce carré se factorise en deux facteurs égaux à *a* et *P* divise au moins l'un des deux facteurs. Donc :

P divise *a.*

De ce fait, il existe un entier *a'* tel que : $a = Pa'$.

Alors $a^2 = a \times a = (Pa') \times (Pa') = P^2 \times (a'^2)$.

Il existe un entier *a''*, égal à (a'^2) tel que $a^2 = P^2 \times a''$. Ce qui prouve que :

P^2 divise a^2.

3.a. Montrons que si *a*² divise *b*², alors *a* divise *b* :

NB. Dans toute cette question 3, nous supposerons les α_i et les β_i « entiers naturels », conformément à l'énoncé.

En posant $a = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ et $b = {p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times \ldots \times {p_m}^{\beta_m}$, nous pouvons ainsi utiliser le même assortiment de facteurs premiers pour les deux nombres, quitte à ce que certains de ces facteurs premiers soient affectés d'un exposant nul (c'est d'ailleurs en cela que réside l'intérêt de l'hypothèse « entiers naturels » faite par l'énoncé).

D'après ce que nous avons vu dans la question 1 :

${a}^{2}={p_1}^{2\alpha_1}\times{p_2}^{2\alpha_2}\times\ldots\times{p_m}^{2\alpha_m}$ et ${b}^{2}={p_1}^{2\beta_1}\times{p_2}^{2\beta_2}\times\ldots\times{p_m}^{2\beta_m}$

Si a^2 divise b^2, alors pour tout indice $i=1,2,\ldots,m$, l'exposant de p_i dans la décomposition de a^2 est inférieur ou égal à son homologue dans la décomposition de b^2, autrement dit, $0\leq 2\alpha_i\leq 2\beta_i$.

En divisant par 2 dans chaque double inégalité, pour tout indice $i=1,2,\ldots,m$: $0\leq \alpha_i\leq \beta_i$.

Ainsi, pour tout indice $i=1,2,\ldots,m$, l'exposant de p_i dans la décomposition de *a* est inférieur ou égal à son homologue dans la décomposition de *b*. Cette condition signifie que *a* divise *b*.

Si a^2 divise b^2, alors *a* divise *b*.

3.b. Montrons que si a^3 divise b^2, alors *a* divise *b* :

De façon analogue à ce que nous avons vu pour les carrés : $a^3={p_1}^{3\alpha_1}\times{p_2}^{3\alpha_2}\times\ldots\times{p_m}^{3\alpha_m}$.

Nous gardons d'autre part la décomposition : $b^2={p_1}^{2\beta_1}\times{p_2}^{2\beta_2}\times\ldots\times{p_m}^{2\beta_m}$

Si a^3 divise b^2, alors pour tout indice $i=1,2,\ldots,m$: $0\leq 3\alpha_i\leq 2\beta_i$.

Ces inégalités impliquent que pour tout indice $i=1,2,\ldots,m$: $0\leq\alpha_i\leq\frac{2}{3}\beta_i$. Si ces inégalités sont vérifiées, alors *a fortiori* les inégalités : $0\leq\alpha_i\leq\beta_i$ sont aussi vérifiées.

Cette condition signifie que *a* divise *b*.

Si a^3 divise b^2, alors *a* divise *b*.

3.c. Si a^2 divise b^3, est-ce que *a* divise *b* ?

Nous allons proposer un contre-exemple infirmant cette (éventuelle …) propriété.

Considérons le nombre $a=8$ et le nombre $b=12$.

Nous constatons que $a^2=64$ et que $b^3=12^3=1728=27\times 64$.

Ainsi, dans ce cas, a^2 divise b^3 mais *a* ne divise pas *b*.

Ce contre-exemple montre que :

a^2 divise b^3 n'implique pas que *a* divise *b*.