Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombre de diviseurs 05

Correction

NB. Soit N un entier ≥ 2 et $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers, où les p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres premiers distincts et les α_i sont des entiers strictement positifs.

Rappelons qu'un entier a divise N si et seulement si a peut s'écrire sous la forme :

$a = {p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times \ldots \times {p_m}^{\beta_m}$ avec pour chaque indice i tel que $1 \leq i \leq m$: $\beta_i \in \{0,\ 1, \ldots,\ \alpha_i\}$.

L'objectif de cet exercice est de justifier que le nombre de diviseurs de N est le produit :

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$$

Nous utiliserons le résultat suivant :

Soit $E_1,\ E_2, \ldots,\ E_m$ (m entier > 0) m ensembles finis et pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$, soit c_i le nombre d'éléments de l'ensemble E_i.

Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ de ces ensembles est l'ensemble des m-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ où $x_i \in E_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$.

Alors, le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ est le nombre[1] $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_m$.

1. Factorisons 6776 :

Sans le moindre état d'âme, nous déléguons ce travail à une calculatrice.

Selon elle :

factor(6776) $\quad 2^3 \cdot 7 \cdot 11^2$

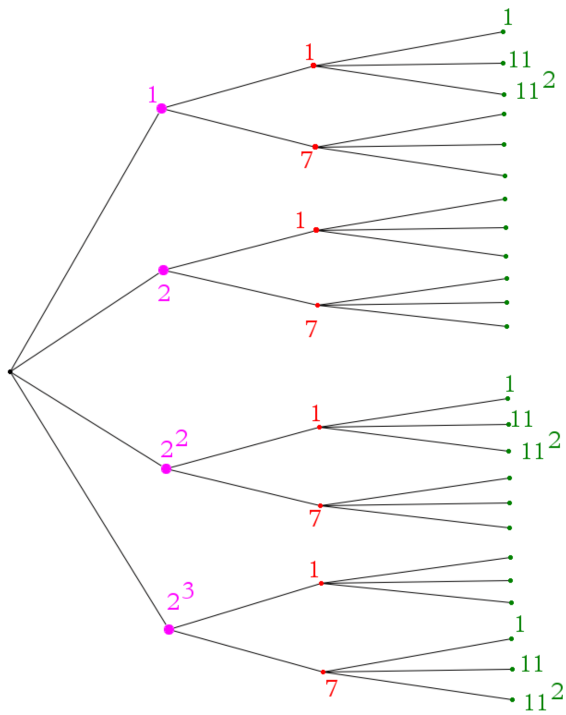
$$6776 = 2^3 \times 7 \times 11^2$$

[1] C'est ce que l'on appelle en dénombrement le « principe multiplicatif » : le cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis est le produit de leurs cardinaux.

2. Construisons un arbre :

Un nombre divise 6776 si et seulement si ses facteurs premiers appartiennent à la liste $\{2, 7, 11\}$ et sont affectés d'exposants inférieurs ou égaux à 3, 1 et 2.

L'arbre présente tous les choix possibles des exposants de chacun des facteurs 2, puis 7, puis 11 donc tous les diviseurs possibles de 6776 sont obtenus. Sur chaque branche, nous pourrions faire le produit des trois facteurs rencontrés pour obtenir le diviseur de 6776 associé. Deux branches distinctes fournissent deux diviseurs distincts puisque les décompositions sont différentes.



Nous construisons un arbre à 24 branches, l'entier 6776 a 24 diviseurs.

3.a. Généralisons :

Soit N un entier naturel ≥ 2 et $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ comme dans le préambule.

Pour chaque indice $i = 1, 2, \ldots, m$, considérons l'ensemble $E_i = \{0,\ 1, \ldots\ ,\ \alpha_i\}$. Cet ensemble a exactement $\alpha_i + 1$éléments.

Considérons le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$.

À chaque m-uplet $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$, associons $x = {p_1}^{\beta_1} \times {p_2}^{\beta_2} \times \ldots \times {p_m}^{\beta_m}$.

Nous obtenons ainsi par construction, d'après le rappel cité en préambule, un diviseur de N.

Considérons l'application de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ vers l'ensemble des diviseurs de N ainsi définie.

Si un entier est un diviseur positif de N, ses facteurs premiers appartiennent à l'ensemble $\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ et son jeu d'exposants, en convenant que $\beta_i = 0$ si p_i n'est pas facteur premier, est un m-uplet de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$: l'application ainsi construite est surjective.

D'autre part, à deux m-uplets différents sont associés deux diviseurs de N différents (puisque leurs décompositions sont différentes) : l'application ainsi construite est injective.

Cette application est donc une bijection. L'ensemble des diviseurs de N a le même nombre d'éléments que le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_m$ et ce nombre est :

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$$

3.b. Déterminons le nombre de diviseurs de 3600 :

Décomposons 3600 en produit de facteurs premiers.

factor(3600) $\quad 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Le nombre de ses diviseurs est $(4 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 5 \times 3 \times 3 = 45$

3600 a 45 diviseurs.

3.c. Trouvons un nombre $A = 121 \times 15^n$ qui a 75 diviseurs :

121 est le carré de 11 et 15 est le produit de deux nombres premiers : $15 = 3 \times 5$.

La décomposition en produit de facteurs premiers de A est : $A = 3^n \times 5^n \times 11^2$

Nous en déduisons que le nombre de diviseurs de A est $(n + 1) \times (n + 1) \times (2 + 1)$, soit $3(n + 1)^2$

Sachant que A admet 75 diviseurs, l'entier naturel n doit vérifier l'équation $3(n + 1)^2 = 75$ c'est-à-dire aussi bien l'équation $(n + 1)^2 = 25$.

Nous en déduisons dans l'ensemble $\mathbb{N}$: $\quad n + 1 = 5$ et donc $n = 4$.

Le seul entier de la forme $A = 121 \times 15^n$ qui a 75 diviseurs est l'entier

$$A = 121 \times 15^4 = 6\ 125\ 625$$