Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombre de diviseurs

04

Correction

NB. Soit N un entier ≥ 2 et $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers, où les p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres premiers distincts et les α_i sont des entiers strictement positifs.

Rappelons qu'alors le nombre de diviseurs de N est le produit : $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$.

1. Montrons qu'un entier *N* qui a 14 diviseurs a au plus deux facteurs premiers :

Soit un entier $N \geq 2$ dont la décomposition est : $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$.

Le nombre D de ses diviseurs est le produit $D = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$.

Puisque les exposants α_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont tous strictement positifs, les nombres $\alpha_i + 1$ sont tous au moins égaux à 2.

L'entier 14 est un produit de deux nombres premiers : $14 = 2 \times 7$. Il n'admet donc pas de décomposition en produit de plus de deux facteurs > 1.

14 ne peut se décomposer en un produit $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$ d'entiers tous au moins égaux à 2 que si le nombre de facteurs de ce produit est au plus égal à 2. Par conséquent :

Le nombre de facteurs premiers de *N* est au plus égal à 2.

2. Montrons que *N* a exactement deux facteurs premiers :

D'après la question précédente, *N* a ou bien un unique facteur premier ou bien deux facteurs premiers. Par hypothèse, « 4 divise *N* » nous dit l'énoncé. Donc, 2 est nécessairement l'un des facteurs premiers de l'entier *N*.

Si 2 est l'unique facteur premier de *N*, alors $N = 2^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 14$, ce qui détermine la valeur de α puis celle de *N*. Nous obtenons $\alpha = 13$ puis $N = 2^{13} = 8192$

Vérifions si la condition « $N = 37m + 1$ » est satisfaite. Pour cela effectuons la division euclidienne de 8192 par 37, ce en quoi une calculatrice nous aide :

$$8192 = 221 \times 37 + 15$$

Le reste de la division euclidienne n'est pas égal à 1, 8192 n'est pas de la forme attendue.

$\frac{8192}{37}$	221.405
$221 \cdot 37$	8177
$8192-221 \cdot 37$	15
$8192=221 \cdot 37+15$	true

Aucun entier n'ayant qu'un seul facteur premier n'est solution du problème.

Si un entier *N* est solution, alors il admet exactement deux facteurs premiers, le nombre premier 2 et un autre nombre premier *p*.

3. Trouvons une solution plus petite que 1000 :

Des questions précédentes, nous déduisons que *N* a une décomposition de la forme $N = 2^{\alpha} \times p^{\beta}$ avec $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 14 = 2 \times 7$. En conséquence, des deux exposants α et β, l'un est égal à 1 et l'autre à 6. L'hypothèse « 4 divise *N* » implique que $\alpha \geq 2$, ce qui ne laisse qu'une possibilité : $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = 1 \end{cases}$.

L'entier *N* est de la forme $N = 2^6 \times p = 64p$ où *p* est un nombre premier distinct de 2.

Les entiers plus petits que 1000 susceptibles de convenir peuvent être de la forme 64*p* où *p* figure dans la liste de nombres premiers suivante : $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ (17 est trop grand : $17 \times 64 > 1000$).

Il reste à tester si la condition $N \equiv 1 \ [37]$ est satisfaite.

Laissons Python agir à notre place pour effectuer ce test quelque peu fastidieux.

Python trouve la solution ci-contre.

```
>>> def peche():
        p=[3,5,7,11,13]
        for x in p:
                if(64*x)%37==1:
                        print({x,64*x})

>>> peche()
{704, 11}
```

Il existe bien une solution < 1000 qui est :

$$N = 704 = 2^6 \times 11$$

NB. Nous pouvons vérifier que $704 = 19 \times 37 + 1$.