Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombre de diviseurs

03

Correction

NB. Soit N un entier ≥ 2 et $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers, où les p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres premiers distincts et les α_i sont des entiers strictement positifs.

Rappelons qu'alors le nombre de diviseurs de N est le produit : $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$.

1. Montrons qu'un entier *N* qui a 5 diviseurs est de la forme p^4 (*p* premier) :

Nous allons démontrer un résultat plus général. Nous allons montrer par contraposition que si le nombre de diviseurs d'un entier est un nombre premier, alors cet entier n'a qu'un seul facteur premier.

Nous savons que, si un entier $N \geq 2$ a pour décomposition $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$, alors le nombre D de ses diviseurs est le produit $D = (\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$.

Puisque les exposants α_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont tous strictement positifs, tous les nombres $\alpha_i + 1$ sont au moins égaux à 2.

Supposons que $m \geq 2$ c'est-à-dire que N admette au moins deux facteurs premiers distincts.

Alors, $(\alpha_1 + 1)$ et $(\alpha_2 + 1)$ sont deux diviseurs de D qui sont tous deux au moins égaux à 2 : le nombre D est un nombre composé.

Nous avons démontré l'implication : « Si N admet au moins deux facteurs premiers distincts, alors le nombre D de ses diviseurs est un nombre composé ». Par contraposition :

Si le nombre D des diviseurs de N est un nombre premier, alors N admet un seul facteur premier.

N est alors de la forme $N = p^\alpha$ où p est un nombre premier. La relation $\alpha + 1 = D$ permet d'expliciter l'entier N en fonction de D et d'un nombre premier arbitraire p : $N = p^{D-1}$

Il suffit maintenant d'appliquer ce résultat général avec $D = 5$ (qui est un nombre premier).

Si N a 5 diviseurs, alors il existe un nombre premier p tel que $N = p^4$.

2. Ecrivons $N - 16$ sous forme d'un produit de trois facteurs dépendant de *p* :

Compte tenu de l'expression de *N* en fonction de *p*, $N = p^4$, nous avons : $N - 16 = p^4 - 16$

L'expression obtenue, $p^4 - 16$, est une différence de deux carrés.

Nous pouvons lui appliquer l'identité $x^2 - y^2 = (x - y) \times (x + y)$ avec $\begin{cases} x = p^2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Nous obtenons : $N = p^4 - 16 = (p^2 - 4) \times (p^2 + 4)$.

L'expression $p^2 - 4$ est elle aussi une différence de deux carrés.

Nous pouvons lui appliquer l'identité $x^2 - y^2 = (x - y) \times (x + y)$ avec $\begin{cases} x = p \\ y = 2 \end{cases}$.

Nous obtenons la factorisation : $p^2 - 4 = (p - 2) \times (p + 2)$ qui induit la factorisation :

$$p^4 - 16 = (p - 2) \times (p + 2) \times (p^2 + 4)$$

N est factorisable en un produit de trois facteurs dépendant de *p* :

$$N = (p - 2) \times (p + 2) \times (p^2 + 4).$$

3. Déduisons-en la valeur de *N* :

Par hypothèse, l'entier *N* est un produit de deux nombres premiers. D'après la question précédente, *N* est factorisable en un produit de trois facteurs dépendant de *p*. Les deux propriétés ne sont compatibles que si l'un des trois facteurs de la « factorisation dépendant de *p* » est égal à 1 (sinon l'un des deux nombres premiers dont *N* est censé être le produit aurait deux diviseurs stricts, ce qui est impossible).

Le seul facteur susceptible d'être égal à 1 est le facteur $p - 2$, ce qui est le cas lorsque $p = 3$.

Vérifions …

Lorsque $p = 3$, nous obtenons : $N = 3^4 = 81$ et $N - 16 = 81 - 16 = 65 = 5 \times 13$

Toutes les conditions imposées par l'énoncé sont bien satisfaites.

« L'entier mystère » est l'entier $N = 81$.