# Maths Expertes
## Terminale

# Nombres Premiers

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# Nombre de diviseurs

02

## Correction

NB. Soit $N$ un entier $\geq 2$ et $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers, où les $p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres premiers distincts et les $\alpha_i$ sont des entiers strictement positifs.

Rappelons qu'alors le nombre de diviseurs de $N$ est le produit : $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$.

**1. Montrons qu'il existe quatre configurations pour un entier ayant 12 diviseurs :**

NB. Le sens de la question posée est le suivant :

Quelle doit être la forme ${p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier $N$ pour que cet entier possède exactement 12 diviseurs ?

C'est-à-dire que nous devons déterminer les diverses façons d'obtenir la relation :

$$(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1) = 12$$

Quel nombre $m$ de facteurs ? Quels coefficients $\alpha_i$ ?

Cherchons d'abord de combien de façons il est possible de décomposer 12 en un produit d'un ou plusieurs nombres entiers tous strictement plus grand que 1 :

La décomposition en produit de facteurs premiers $12 = 2^2 \times 3$ montre que 12 peut être décomposé de quatre façons différentes en produit de nombres > 1 :

- En un produit de 3 nombres, $12 = 2 \times 2 \times 3$
- De deux façons en un produit de deux nombres, $12 = (2 \times 2) \times 3 = 4 \times 3$ ou bien aussi $12 = 2 \times (2 \times 3) = 2 \times 6$
- En un « produit » d'un unique nombre, lui-même.

Suivant le nombre d'entiers de la décomposition considérée (1, 2 ou 3), identifions maintenant celle-ci soit à $(\alpha_1 + 1)$, soit à $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1)$ soit à $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times (\alpha_3 + 1)$.

- Trois nombres : $12 = 2 \times 2 \times 3$. Identifions : $\begin{cases} (\alpha_1 + 1) = 2 \\ (\alpha_2 + 1) = 2 \\ (\alpha_3 + 1) = 3 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$.

  Les entiers correspondant à cette configuration sont les entiers de la forme $p_1 \times p_2 \times {p_3}^2$ où $p_1$, $p_2$ et $p_3$ sont trois nombres premiers distincts.

- Deux nombres : $12 = 3 \times 4$. Identifions : $\begin{cases} (\alpha_1 + 1) = 3 \\ (\alpha_2 + 1) = 4 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$.

  Les entiers correspondant à cette configuration sont les entiers de la forme ${p_1}^2 \times {p_2}^3$ où $p_1$ et $p_2$ sont deux nombres premiers distincts.

- Deux nombres aussi : $12 = 2 \times 6$. Identifions : $\begin{cases} (\alpha_1 + 1) = 2 \\ (\alpha_2 + 1) = 6 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 5 \end{cases}$.

  Les entiers correspondant à cette configuration sont les entiers de la forme $p_1 \times {p_2}^5$ où $p_1$ et $p_2$ sont deux nombres premiers distincts.

- Un seul nombre, 12 lui-même. Identifions : $(\alpha_1 + 1) = 12$ et donc $\alpha_1 = 11$.

  Les entiers qui ont 12 diviseurs et qui correspondent à cette configuration sont les entiers de la forme ${p_1}^{11}$ où $p_1$ est un nombre premier.

**Concluons :**

Les entiers qui ont 12 diviseurs sont :

Ou bien de la forme $p_1 \times p_2 \times {p_3}^2$

Ou bien de la forme ${p_1}^2 \times {p_2}^3$

Ou bien de la forme $p_1 \times {p_2}^5$

Ou bien de la forme ${p_1}^{11}$

où les nombres $p_i$ sont des nombres premiers. Il y a bien quatre « configurations possibles ».

**2. Trouvons les cinq entiers plus petits que 100 qui ont 12 diviseurs :**

Nous allons considérer chacune des quatre configurations possibles et faire l'inventaire des nombres premiers $p_i$ que nous pouvons utiliser afin d'obtenir un nombre au plus égal à 100.

**Configuration $\boldsymbol{p_1}^{\mathbf{11}}$ :**

Le plus petit nombre de cette forme est $2^{11} = 2048$, il n'existe aucun nombre de cette forme qui soit inférieur ou égal à 100.

**Configuration $\boldsymbol{p_1} \times \boldsymbol{p_2}^{\mathbf{5}}$ :**

Le seul choix possible pour le nombre premier $p_2$ est $p_2 = 2$, auquel cas $p_2{}^5 = 2^5 = 32$ ce qui laisse le seul choix $p_1 = 3$.

Le nombre $96 = 3 \times 2^5$ admet 12 diviseurs et est plus petit que 100.

**Configuration $\boldsymbol{p_1}^{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{p_2}^{\mathbf{3}}$ :**

Le nombre $p_1{}^2$ est au moins égal à $2^2 = 4$ et donc le nombre $p_2{}^3$ est au plus égal à $\frac{100}{4} = 25$. Le seul cube de nombre premier qui a cette propriété est celui de 2. Nécessairement : $p_2{}^3 = 2^3 = 8$.

Le choix de $p_1$ est déterminé par l'inégalité $8p_1{}^2 \leq 100$ soit $p_1{}^2 \leq \frac{25}{2}$. Le seul nombre premier distinct de 2 dont le carré vérifie cette inégalité est celui de 3.

Le nombre $72 = 2^3 \times 3^2$ admet 12 diviseurs et est plus petit que 100.

**Configuration $\boldsymbol{p_1} \times \boldsymbol{p_2} \times \boldsymbol{p_3}^{\mathbf{2}}$ :**

Les nombres $p_1$ et $p_2$ étant des nombres premiers distincts, leur produit est au moins égal à 6 et donc le nombre $p_3{}^2$ est au plus égal à $\frac{100}{6} = \frac{50}{3}$. Les seuls carrés de nombres premiers qui ont cette propriété sont ceux de 2 et de 3.

- Si $p_3 = 3$, le choix des nombres premiers (distincts de 3) $p_1$ et $p_2$, est déterminé par l'inégalité $9 \times p_1 \times p_2 \leq 100$, soit $p_1 \times p_2 \leq \frac{100}{9}$. Seuls les nombres premiers 2 et 5 vérifient cette inégalité.

Le nombre $90 = 2 \times 5 \times 3^2$ admet 12 diviseurs et est plus petit que 100.

- Si $p_3 = 2$, le choix des nombres premiers (distincts de 2) $p_1$ et $p_2$, est déterminé par l'inégalité $4 \times p_1 \times p_2 \leq 100$, soit $p_1 \times p_2 \leq 25$. Nous pouvons choisir ou bien 3 et 5, ou bien 3 et 7.

  Les deux nombres $60 = 3 \times 5 \times 2^2$ et $84 = 3 \times 7 \times 2^2$ admettent 12 diviseurs et sont plus petits que 100.

**Concluons :**

Nous avons bien trouvé cinq nombres convenables : 96, 72, 90, 60 et 84.

**En complément offert par Freemaths, retrouvons « par exhaustivité » ces cinq entiers à l'aide d'un algorithme Python :**

Dans la mesure où nous recherchons des entiers ayant une certaine propriété dans un ensemble fini, en l'occurrence l'ensemble des entiers de 1 à 100, nous pouvons nous aider d'un algorithme testant un par un les éléments de cet ensemble et sélectionnant ceux qui satisfont la propriété en question. Il s'agit là d'un *raisonnement par exhaustivité.*

| | |
|---|---|
| L'algorithme « douzediv() » dresse la liste **d** des diviseurs de chaque entier **x** de 1 à 100. Si cette liste possède 12 éléments, alors l'entier **x** en jeu est affiché avec la liste **d** de ses diviseurs.<br>Nous retrouvons les entiers 60, 72, 84, 90 et 96 avec les listes respectives de leurs 12 diviseurs. | <pre>>>> def douzediv():<br>        for x in range(1,101):<br>                d=[1]<br>                for i in range(2,x+1):<br>                        if x%i==0:<br>                                d.append(i)<br>                if len(d)==12 :<br>                        print(x,d)<br><br>>>> douzediv()<br>60 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60]<br>72 [1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72]<br>84 [1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84]<br>90 [1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90]<br>96 [1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96]</pre> |

NB. Les conditions d'application d'un « raisonnement par exhaustivité » pour obtenir les éléments d'un ensemble *E* (par exemple l'ensemble des solutions d'une équation) sont les suivantes :

- Inclure l'ensemble *E* dans un ensemble fini.
- Disposer d'un critère de sélection permettant de repérer dans cet ensemble fini, les éléments de *E* et eux seuls.