Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Nombre de diviseurs

01

Correction

NB. Soit N un entier ≥ 2 et $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers, où les p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont des nombres premiers distincts et les α_i sont des entiers strictement positifs.

Rappelons qu'alors le nombre de diviseurs de N est le produit : $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \ldots \times (\alpha_m + 1)$.

1. Montrons que $18n = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta+2}$:

Décomposons 18 en produit de facteurs premiers : $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$

Calculons le produit $18n$ en utilisant les décompositions des deux nombres :

$18n = (2 \times 3^2) \times \left(2^\alpha \times 3^\beta\right) = (2 \times 2^\alpha) \times \left(3^2 \times 3^\beta\right) = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta+2}$.

Nous obtenons bien : $18n = 2^{\alpha+1} \times 3^{\beta+2}$.

NB. Il s'agit là de la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $18n$.

2. Prouvons que $\alpha(\beta - 1) = 4$:

En tenant compte du rappel énoncé en préambule et des décompositions respectives en produit de facteurs premiers de n et de $18n$, nous pouvons calculer leur nombre de diviseurs respectifs.

- Le nombre de diviseurs de n est : $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1$.
- Le nombre de diviseurs de $18n$ est : $(\alpha + 2)(\beta + 3) = \alpha\beta + 3\alpha + 2\beta + 6$.

Par hypothèse, le nombre de diviseurs de $18n$ est le double du nombre de diviseurs de n, ce qui nous permet d'écrire une condition portant sur le couple (α, β) :

$$\alpha\beta + 3\alpha + 2\beta + 6 = 2 \times (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)$$

Développons le second membre : $\alpha\beta + 3\alpha + 2\beta + 6 = 2\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 2$

Nous obtenons l'équation $\alpha\beta - \alpha - 4 = 0$ ou aussi bien $\alpha(\beta - 1) = 4$.

Si le nombre $n = 2^\alpha \times 3^\beta$ a deux fois moins de diviseurs que $18n$, alors la couple (α, β) vérifie l'équation $\alpha(\beta - 1) = 4$.

3. Déterminons les valeurs de *n* possibles :

L'entier 4 admet deux décompositions en produit de deux facteurs : $4 = 4 \times 1 = 2 \times 2$ ce qui nous amène à envisager trois cas de figure :

- $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$ et $n = 2^4 \times 3^2 = 144.$
- $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 1 = 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 5 \end{cases}$ et $n = 2 \times 3^5 = 486.$
- $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta - 1 = 2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}$ et $n = 2^2 \times 3^3 = 108.$

Les valeurs possibles de *n* sont 108, 144 et 486.