Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Amusons-nous 03

Correction

1. Calculons les termes de rangs 1, 2 et 3 :

Pour cela, aidons-nous d'un algorithme Python. Nous avons fait afficher les termes de rangs 1, 2 et 3, respectivement 31, 331 et 3331. Pour faire bonne mesure, nous avons calculé ensuite, au même prix, les termes de rangs 4 et 5.	(code ci-dessous)

```
>>> def amusetroi(c):
        i=0
        u=1
        for n in range(1,c+1):
                i=i+1
                u=10*u+21
                print("le terme de rang",i,"est égal à",u)


>>> amusetroi(3)
le terme de rang 1 est égal à 31
le terme de rang 2 est égal à 331
le terme de rang 3 est égal à 3331
>>> amusetroi(5)
le terme de rang 1 est égal à 31
le terme de rang 2 est égal à 331
le terme de rang 3 est égal à 3331
le terme de rang 4 est égal à 33331
le terme de rang 5 est égal à 333331
...
```

2.a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $3u_n = 10^{n+1} - 7$:

Notons au préalable que, compte tenu de la relation de récurrence définissant la suite (u_n) :

$$3u_{n+1} = 3 \times (10u_n + 21) = 10 \times (3u_n) + 63$$

Appelons « propriété $\wp_n$ » la propriété « $3u_n = 10^{n+1} - 7$ ».

Initialisation : Au rang 0, nous vérifions que d'une part $3u_0 = 3 \times 1 = 3$ et que d'autre part $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3$. Il y a bien égalité de valeur entre les deux expressions à comparer.

La propriété $\wp_0$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel *n* la propriété $\wp_n$ soit vérifiée, c'est-à-dire que nous disposions de l'égalité : $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

D'après la relation notée en préalable : $3u_{n+1} = 10 \times (3u_n) + 63$

$$3u_{n+1} = 10 \times (10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 70 + 63$$

Nous obtenons : $3u_{n+1} = 10^{(n+1)+1} - 7$

Quel que soit l'entier naturel *n*, $\quad 3u_n = 10^{n+1} - 7 \implies 3u_{n+1} = 10^{(n+1)+1} - 7$

Nous avons démontré l'implication $\wp_n \Rightarrow \wp_{n+1}$, la « propriété $\wp_n$ » est héréditaire.

Concluons :

- La propriété $\wp_n$ est initialisée au rang 0.
- Elle est héréditaire.

Nous pouvons affirmer qu'elle est vérifiée pour tout entier naturel.

Pour tout entier naturel *n*, $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

2.b. Déterminons l'écriture décimale de u_n :

Le calcul des premiers termes nous amène à émettre la conjecture suivante :

L'écriture décimale de u_n paraît être : $\overline{\underbrace{333\ldots3}_{n\ fois}1}$. Démontrons cette conjecture.

Notons (provisoirement) v_n le nombre entier qui s'écrit ainsi, à charge pour nous de montrer qu'il s'agit bien de u_n.

Soit donc v_n le nombre qui s'écrit $\overline{\underbrace{333\ldots3}_{n\ fois}1}$ en numération décimale. Cela signifie que :

$$v_n = 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \cdots + 3 \times 10^n$$

Alors : $3v_n = 3 + 9 \times 10 + 9 \times 10^2 + \cdots + 9 \times 10^n$

Pour chaque entier *k* tel que $1 \leq k \leq n$, écrivons : $9 \times 10^k = (10 - 1) \times 10^k = 10^{k+1} - 10^k$.

Nous obtenons : $3v_n = 3 + (10^2 - 10) + (10^3 - 10^2) + \cdots + (10^{n+1} - 10^n)$

Toutes les puissances de dix s'éliminent sauf celles de plus grand et de plus petit exposant.

Il reste : $3v_n = 3 - 10 + 10^{n+1} = 10^{n+1} - 7 = 3u_n$.

De l'égalité $3v_n = 3u_n$ pour tout entier naturel *n*, nous déduisons l'identification $v_n = u_n$.

Nous avons démontré que l'écriture décimale de u_n est bien : $\overline{\underbrace{333\ldots3}_{n\ fois}1}$.

3. Montrons que u_2 est un nombre premier :

NB. Nous savons qu'un nombre entier $A \geq 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun des nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à sa racine carrée.

Nous avons vu que $u_2 = 331$.

Nous vérifions facilement que 331 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 ni par 11 car il ne satisfait aucun de leurs critères de divisibilité.

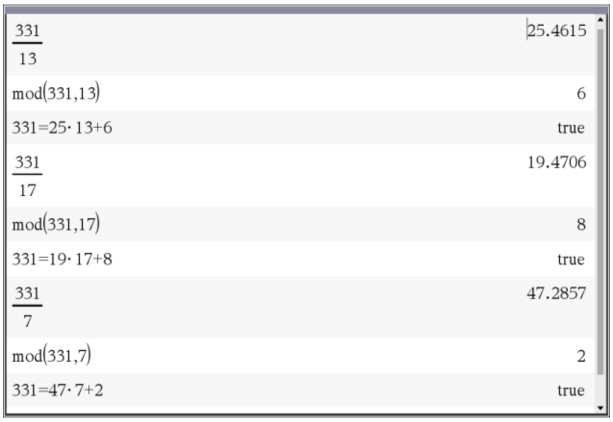
Les divisions euclidiennes de 331 par 7, 13 et 17 s'écrivent, respectivement :

$$331 = 47 \times 7 + 2$$

$$331 = 25 \times 13 + 6$$

$$331 = 19 \times 17 + 8$$

Aucun des restes de ces divisions euclidiennes n'est nul, 331 n'est divisible ni par 7, ni par 13 ni par 17.



$\frac{331}{13}$	25.4615
mod(331,13)	6
331=25· 13+6	true
$\frac{331}{17}$	19.4706
mod(331,17)	8
331=19· 17+8	true
$\frac{331}{7}$	47.2857
mod(331,7)	2
331=47· 7+2	true

On note enfin que : $331 < 361 = 19^2$ donc que $\sqrt{331} < 19$.

Nous avons testé systématiquement la divisibilité de 331 par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée. Le nombre 331 n'étant divisible par aucun d'entre eux :

331 est un nombre premier.

4. Montrons que u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3 ni par 5 :

Nous avons vu dans la **question 2.b** que l'écriture décimale de u_n est $\overline{\underbrace{333\ldots3}_{n\ fois}1}$.

- Le chiffre des unités est un « 1 » : ni le critère de divisibilité par 2 (chiffre des unités pair) ni celui de divisibilité par 5 (chiffre des unités égal à 0 ou 5) n'est satisfait.
- La somme des chiffres de u_n est égale à $3n + 1$, elle n'est pas multiple de 3, le critère de divisibilité par 3 n'est pas satisfait.

u_n n'est divisible ni par 2, ni par 5 ni par 3.

5.a. Montrons que $3u_n \equiv 4 - (-1)^n$:

D'après le résultat de la **question 2.a**, nous savons que $3u_n = 10^{n+1} - 7$, relation que nous pouvons écrire aussi bien : $3u_n = 10^{n+1} + 4 - 11$.

Utilisons une congruence modulo 11. De cette dernière égalité, nous déduisons la congruence :

$$3u_n \equiv 10^{n+1} + 4 \quad [11]$$

Congruence qui nous amène à étudier le comportement des puissances de 10 relativement à la relation de congruence modulo 11.

Vu l'égalité $10 = -1 + 11$, nous disposons de la congruence stratégique :

$$10 \equiv -1 \ [11].$$

En vertu de la compatibilité avec l'élévation à une puissance :

$$10^p \equiv (-1)^p \ [11] \text{ pour tout entier naturel } p.$$

En exploitant ce résultat avec $p = n + 1$, nous obtenons la congruence $10^{n+1} \equiv (-1\ )^{n+1} \quad [11]$ d'où nous déduisons la congruence : $10^{n+1} + 4 \equiv 4 + (-1\ )^{n+1} \quad [11]$

Par transitivité, $\begin{cases} 3u_n \equiv 10^{n+1} + 4 \quad [11] \\ 10^{n+1} + 4 \equiv 4 + (-1\ )^{n+1} \quad [11] \end{cases} \Rightarrow 3u_n \equiv 4 + (-1\ )^{n+1} \quad [11]$

Or, $(-1\ )^{n+1} = -(-1)^n$. La dernière congruence obtenue s'écrit conformément à l'attendu de l'énoncé :

$$3u_n \equiv 4 - (-1\ )^n \quad [11]$$

5.b. Déduisons-en que u_n n'est pas divisible par 11 :

La **question 5.a** nous montre que, suivant la parité de *n*, $3u_n$ est congru soit à 3 soit à 5 modulo 11. Quelle que soit la parité de *n*, l'entier $3u_n$ n'est donc pas un multiple de 11.

Puisque $3u_n$ n'est pas un multiple de 11, u_n ne l'est pas non plus.

Quel que soit l'entier naturel *n*, u_n n'est pas divisible par 11.

6.a. Montrons que $10^{16} \equiv 1 \quad [17]$:

Rappelons l'énoncé du petit théorème de Fermat : Si *P* est un nombre premier et si *a* est un entier naturel non divisible par *P*, alors $a^{P-1} \equiv 1 \quad [P]$.

- 17 est un nombre premier.
- 10 n'est pas divisible par 17

Nous pouvons appliquer le petit théorème de Fermat avec $a = 10$; $P = 17$; $P - 1 = 16$.

D'après le petit théorème de Fermat : $10^{16} \equiv 1 \quad [17]$.

NB. Cette congruence implique par élévation à la puissance *k* des deux membres de cette congruence que pour tout entier naturel *k* :

$$10^{16k} \equiv 1 \quad [17].$$

Toutes les puissances de 10 dont l'exposant est un multiple de 16 sont congrues à 1 modulo 17. Nous allons utiliser ce résultat dans la question suivante.

6.b. Montrons que pour tout entier naturel *k*, u_{16k+8} est divisible par 17 :

En écrivant la formule explicite obtenue dans la **question 2.a** avec $n = 16k + 8$, nous savons que :

$$3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7.$$

Les entiers 3 et 17 étant des entiers premiers entre eux, 17 divise u_{16k+8} si et seulement si 17 divise son triple $3u_{16k+8}$ (application du théorème de Gauss).

Prouver que u_{16k+8} est divisible par 17 équivaut donc à prouver que $10^{16k+9} - 7$ est divisible par 17, ce qui équivaut, en langage de congruences, à prouver que : $10^{16k+9} - 7 \equiv 0 \quad [17]$

Vu la remarque faite en fin de question précédente, et compte tenu que $10^{16k+9} = 10^{16k} \times 10^9$, nous pouvons affirmer que :

$$10^{16k+9} - 7 \equiv 10^9 - 7 \quad [17]$$

Il reste, pour achever la démonstration, à vérifier que nous avons bien :

$$10^9 - 7 \equiv 0 \quad [17]$$

Allons-y avec un algorithme Python qui va étudier à notre place les restes des divisions des puissances de 10 successives (jusqu'à la neuvième) dans leur division euclidienne par 17.

```
>>> def freemamuse():
        for n in range (1,10):
                s=(10**n)%17
                print("10 à la puissance",n,"est congru à",s,"modulo17")


>>> freemamuse()
10 à la puissance 1 est congru à 10 modulo17
10 à la puissance 2 est congru à 15 modulo17
10 à la puissance 3 est congru à 14 modulo17
10 à la puissance 4 est congru à 4 modulo17
10 à la puissance 5 est congru à 6 modulo17
10 à la puissance 6 est congru à 9 modulo17
10 à la puissance 7 est congru à 5 modulo17
10 à la puissance 8 est congru à 16 modulo17
10 à la puissance 9 est congru à 7 modulo17
```

Python nous apprend que $10^9 \equiv 7 \quad [17]$ donc que :

$$10^9 - 7 \equiv 0 \quad [17]$$

Cette vérification achève la démonstration et prouve que pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est bien divisible par 17.