

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Nombres Premiers



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ÉNONCÉ

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 10U_n + 21 \end{cases}$$

1. Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $3U_n = 10^{n+1} - 7$.
b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'écriture décimale de U_n .
3. Montrer que U_2 est un nombre premier.
4. On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (U_n) par certains nombres premiers.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3U_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.
b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n n'est pas divisible par 11.
6. a. Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.
b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, U_{16k+8} est divisible par 17.