Maths Expertes
Terminale

Nombres Premiers

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Amusons-nous 01

Correction

Dans cet exercice, on étudie dans l'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ quelques équations de la forme $x^2 + y^2 = p^2$ où p est un nombre premier.

Une remarque générale à propos des couples solutions de (E) :

Soit p un nombre premier et $(x,\ y)$ un couple solution de l'équation (E) associée. Puisque x et y sont tous deux des entiers strictement positifs, si la relation $x^2 + y^2 = p^2$ est vérifiée, alors : $\begin{cases} x^2 < p^2 \\ y^2 < p^2 \end{cases}$. Les entiers x et y vérifient nécessairement les inégalités $1 \leq x < p$ et $1 \leq y < p$.

Tous les couples solutions de (E) appartiennent donc à l'ensemble :

$$A_p = \{1, 2, \dots, p-1\} \times \{1, 2, \dots, p-1\}$$

Cette inclusion de l'ensemble des solutions dans l'ensemble fini A_p sera utile à plusieurs reprises (dans les questions 1, 2.b, 3.b et 4).

1. Montrons que si $p = 2$, l'équation (E) n'a pas de solution :

Lorsque $p = 2$, il n'y a qu'un seul couple $(x,\ y)$ d'entiers naturels non nuls, le couple $(1,\ 1)$, qui vérifie les inégalités $1 \leq x < 2$ et $1 \leq y < 2$ de la « remarque générale » (l'ensemble A_1 n'a qu'un élément) et ce couple n'est pas solution de l'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Si $p = 2$, l'équation (E) n'a pas de solution.

2.a. Si $p \neq 2$ et si $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E), montrons que x et y sont de parité différente :

L'entier p étant un nombre premier distinct de 2, c'est un nombre impair. Son carré p^2 est aussi un nombre impair.

Nous savons que la somme de deux nombres de même parité (tous deux pairs ou tous deux impairs) est un nombre pair. Par contraposition, si la somme de deux nombres entiers est un nombre impair, alors ces deux nombres sont de parité différente, l'un est pair et l'autre est impair.

En vertu de cette propriété, si $x^2 + y^2 = p^2$, alors des deux carrés x^2 et y^2, l'un est pair et l'autre impair.

Nous savons par ailleurs qu'un nombre entier a la même parité que son carré.

(NB. C'est-à-dire qu'un nombre entier est impair si et seulement si son carré est impair, un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair.)

Puisque des deux carrés x^2 et y^2, l'un est pair et l'autre impair :

Des deux nombres *x* et *y*, l'un est pair et l'autre impair.

2.b. Si $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E), montrons que ni *x* ni *y* ne sont divisibles par *p* :

Nous avons vu dans la « remarque générale » que les couples (x, y) solutions de (E), s'il en existe, appartiennent à l'ensemble $A_p = \{1, 2, \dots, p-1\} \times \{1, 2, \dots, p-1\}$. Or, aucun des entiers de l'ensemble $\{1, 2, \dots, p-1\}$ n'est divisible par *p*. Aucune des deux composantes d'un couple appartenant à A_p n'est divisible par *p*.

Si $(x,\ y)$ est solution de (E), alors ni *x* ni *y* ne sont divisibles par *p*.

2.c. Si $(x,\ y)$ est solution de l'équation (E), montrons que *x* et *y* sont premiers entre eux :

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers strictement positifs vérifiant $x^2 + y^2 = p^2$ et soit *d* le PGCD des deux nombres *x* et *y*. Alors *d* divise leurs carrés, donc divise la somme de leurs carrés $x^2 + y^2$.

Il en résulte que le PGCD *d* de *x* et de *y* divise p^2. Or, *p* étant un nombre premier, son carré a exactement trois diviseurs, 1, *p* et lui-même p^2. La **question 2.b** exclut le fait que *d* soit égal à *p* ou *a fortiori* à p^2 (« ni *x* ni *y* ne sont divisibles par *p* »). Nécessairement, $d = 1$.

Si $(x,\ y)$ est solution de (E), alors *x* et *y* sont premiers entre eux.

3.a. Vérifions que le couple $(|u^2 - v^2|,\ 2uv)$ est solution de l'équation (E) :

Supposons que le nombre premier *p*, distinct de 2, soit la somme des carrés de deux entiers strictement positifs : $p = u^2 + v^2$.

Ces deux entiers *u* et *v* sont nécessairement distincts, sinon nous aurions la relation $p = 2u^2$; l'entier *p* serait pair, ce qui impossible pour un nombre premier distinct de 2. Leurs carrés sont distincts, ce qui assure que $u^2 \neq v^2$. Il en résulte que le couple $(|u^2 - v^2|,\ 2uv)$ est effectivement un couple d'entiers strictement positifs.

- Nous avons d'une part : $p^2 = (u^2 + v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4$
- Nous avons d'autre part : $(|u^2 - v^2|)^2 + \ (2uv)^2 = (u^4 - 2u^2v^2 + v^4) + 4u^2v^2$ soit : $(|u^2 - v^2|)^2 + \ (2uv)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4$.

L'égalité $(|u^2 - v^2|)^2 + \ (2uv)^2 = p^2$ est bien vérifiée.

Si le nombre premier p, distinct de 2, est la somme des carrés de deux entiers strictement positifs, $p = u^2 + v^2$, alors le couple $(|u^2 - v^2|,\ 2uv)$ est solution de l'équation (E).

3.b. Proposons une solution lorsque *p* est égal à 5 puis à 13 :

Nous proposons deux méthodes. La première est la méthode attendue, inspirée de la **question 3.a** ; elle nous donnera « une solution ». La deuxième utilise un algorithme et nous donnera « toutes les solutions » ; elle sera réinvestie pour résoudre la question suivante.

Méthode 1 : Appliquons 3.a :

Cas $p = 5$

$5 = 2^2 + 1^2$. Nous pouvons appliquer le résultat de la **question 3.a** avec $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$. Nous avons $\begin{cases} |u^2 - v^2| = 4 - 1 = 3 \\ 2uv = 4 \end{cases}$.

Le couple $(3, 4)$ est un couple solution.

Cas $p = 13$

$13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$. Nous pouvons appliquer le résultat de la **question 3.a** avec $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$. Nous avons $\begin{cases} |u^2 - v^2| = 9 - 4 = 5 \\ 2uv = 2 \times 3 \times 2 = 12 \end{cases}$.

Le couple $(5, 12)$ est un couple solution.

Méthode 2 : Résolvons l'équation (E) avec Python :

Soit un couple $(x,\ y)$ est solution de (E).

Nous avons vu que ce couple appartient à l'ensemble fini $A_p = \{1, 2, \dots, p-1\} \times \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Pour p nombre premier fixé, l'ensemble des solutions de (E) est inclus dans A_p.

En créant un algorithme balayant systématiquement ce domaine et détectant à coup sûr tous les cas où la relation $x^2 + y^2 = p^2$ est vérifiée et seulement ces cas, nous sommes assurés d'obtenir tous les couples solutions.

En revanche (**question 4**), si l'algorithme ne détecte rien, c'est que l'équation (E) n'a pas de solution.

Une telle méthode de résolution est dite méthode de résolution « par exhaustivité ».

Notre algorithme Python trouve les couples solutions $(3,\ 4)$ et $(4, 3)$ lorsque $p = 5$ et les couples solutions $(5,\ 12)$ et $(12,\ 5)$ lorsque $p = 13$. Nous sommes sûrs qu'il s'agit là de tous les couples solutions.

```
>>> def amuse(p):
        for x in range(1,p):
                for y in range(1,p):
                        if x*x+y*y==p*p:
                                print(x,y)


>>> amuse(5)
3 4
4 3
>>> amuse(13)
5 12
12 5
```

4. Vérifions que l'équation (E) n'a pas de solution pour $p = 3$ et pour $p = 7$:

Pour cela, améliorons notre algorithme Python en définissant un compteur **ns** dénombrant les couples solutions. Si ce compteur reste bloqué à zéro, c'est qu'aucune solution n'a été trouvée. Ce qui est le cas pour 3 et pour 7.

```
>>> def amuse(p):
        ns=0
        for x in range(1,p):
                for y in range(1,p):
                        if x*x+y*y==p*p:
                                print(x,y)
                                ns=ns+1
        if ns==0:
                print("l'équation (E) n'a pas de solution")


>>> amuse(3)
l'équation (E) n'a pas de solution
>>> amuse(7)
l'équation (E) n'a pas de solution
```

L'équation (E) n'a pas de solution ni pour $p = 3$ ni pour $p = 7$.