

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes

## Terminale

Nombres Premiers



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

## ÉNONCÉ

Soit  $p$  un nombre premier. On se propose d'étudier l'existence de couples  $(x; y)$  d'entiers naturels non nuls vérifiant l'équation (E):  $x^2 + y^2 = p^2$ .

1. On pose  $p = 2$ . Montrer que l'équation (E) est sans solution.
2. On suppose que  $p \neq 2$  et que  $(x; y)$  est solution de l'équation (E).
  - a. Montrer que  $x$  et  $y$  sont de parités différentes.
  - b. Montrer que  $x$  et  $y$  ne sont pas divisibles par  $p$ .
  - c. En déduire que  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux.
3. On suppose que  $p$  est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire que:  
$$p = u^2 + v^2$$
 où  $u$  et  $v$  sont deux entiers naturels strictement positifs.
  - a. Vérifier que le couple  $(|u^2 - v^2|, 2uv)$  est solution de (E).
  - b. Donner une solution de (E) lorsque  $p = 5$  puis lorsque  $p = 13$ .
4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque  $p$  n'est pas la somme de deux carrés.

Démontrer que  $x^2 + y^2 = 9$  et  $x^2 + y^2 = 49$  n'admettent pas de solutions.