Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 9

CORRECTION

Partie A:

1. Démontrons que le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI ssi $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$:

En utilisant la définition de l'énoncé et en appliquant le théorème de **Pythagore**, nous avons:

$$x^2 + (x+1)^2 = y^2 \iff x^2 + x^2 + 2x + 1 = y^2$$

$$\Longrightarrow y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

Au total, le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI ssi:

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

2. Montrons que $(3\,;5)$ défini bien le TRPI ayant les plus petits côtés:

Ici:
- les côtés sont des entiers naturels non nuls,
- les côtés sont non nuls.

Donc nous devons déterminer le plus petit entier naturel non nul " x " tel que " y " soit aussi un entier naturel non nul avec: $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

Pour cela, nous allons faire du tâtonnement en commençant par $x = 1$.

- Si $x = 1$: $y = \sqrt{5} \notin \mathbb{N}^*$.

• Si $x = 2$: $y = \sqrt{13} \notin \mathbb{N}^*$.

• Si $x = 3$: $y = 5 \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, nous retiendrons le couple : $(3 ; 5)$.

Au total : le couple $(3 ; 5)$ défini bien le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls.

3. a. Montrons que si n^2 est impair alors n est impair :

Nous allons procéder à un raisonnement par l'absurde.

En effet, si nous montrons : n pair => n^2 pair,

on pourra alors affirmer : n^2 impair => n impair.

Si n est un entier naturel pair, nous pouvons alors l'écrire sous la forme :

$$n = 2p, p \in \mathbb{N}.$$

Dans ces conditions : n pair => $n = 2p, p \in \mathbb{N}$

=> $n \times n = 2p \times 2p, p \in \mathbb{N}$

=> $n^2 = 4p^2, p \in \mathbb{N}$

=> $n^2 = 2 \times p'$ avec $p' = 2p^2 \in \mathbb{N}$

=> n^2 est pair.

Au total : si n^2 est impair alors n est impair.

3. b. Montrons que y est nécessairement impair :

Nous savons que : • $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

• si n^2 est impair alors n est impair.

Or: $2x^2 + 2x = 2\,(x^2 + x)$ est pair car $x^2 + x \in \mathbb{N}^*$.

Par conséquent: $(2x^2 + 2x) + 1$ est impair ou plus exactement y^2 est impair.

Comme y^2 est impair, nous pouvons alors affirmer que y est nécessairement impair.

Au total: y est nécessairement impair.

4. Montrons que si le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux:

Pour répondre à cette question, nous allons appliquer: le théorème de **BÉZOUT**.

D'après ce théorème: " Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux ssi il existe deux entiers u et v tels que: $a \cdot u + b \cdot v = 1$ ".

Ici le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI.

D'où nous avons: $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \iff y^2 - 2x^2 - 2x = 1$$

$$\iff y \times y + x \times (-2x - 2) = 1$$

$$\iff y \cdot u + x \cdot v = 1, \text{ avec: } \boldsymbol{u = y} \text{ et } \boldsymbol{v = -2x - 2}.$$

Comme x et y sont deux entiers naturels non nuls, nous pouvons affirmer qu'ils sont premiers entre eux car: il existe bien deux entiers u $(= y)$ et v $(= -2x - 2)$ tels que $y \cdot u + x \cdot v = 1$.

Au total: si le couple d'entiers naturels $(x\,;y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B:

1. Exprimons x' et y' en fonction de x et y:

D'après l'énoncé: • $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$,

• $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

• $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'où: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2 \end{cases}$.

Ainsi: $x' = 3x + 2y + 1$ et $y' = 4x + 3y + 2$.

2. a. Montrons l'égalité demandée:

Nous savons que: $x' = 3x + 2y + 1$ et $y' = 4x + 3y + 2$.

Dans ces conditions:

$$y'^2 - 2x'(x' + 1) = (4x + 3y + 2)^2 - 2(3x + 2y + 1)(3x + 2y + 2)$$

$$= y^2 - 2x(x + 1).$$

Ainsi, nous avons bien: $y'^2 - 2x'(x' + 1) = y^2 - 2x(x + 1)$.

2. b. Déduisons-en que si $(x ; y)$ définit un TRPI, alors $(x' ; y')$ définit également un TRPI:

Si $(x ; y)$ définit un TRPI: $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.

$y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \iff y^2 - 2x^2 - 2x = 1$

$$\Longleftrightarrow \ y^2 - 2x(x+1) = 1.$$

Or: $y^2 - 2x(x+1) = y'^2 - 2x'(x'+1)$, d'après la question précédente.

D'où: $y'^2 - 2x'(x'+1) = 1 \Longleftrightarrow y'^2 = 2x'^2 + 2x' + 1$ ce qui signifie que le couple $(x'; y')$ définit également un TRPI.

Au total: $(x; y)$ définit un TRPI $\Rightarrow$ $(x'; y')$ définit un TRPI.

3. Montrons que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n; y_n)$ définit un TRPI:

Nous savons que:

- si le couple $(x; y)$ définit un TRPI, **alors** le couple $(x'; y')$ définit également un TRPI;
- $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$;
- $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B \Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $(x_n; y_n)$ définit un TRPI ".

Initialisation: • $y_0^2 = 2x_0^2 + 2x_0 + 1$?

oui car: $y_0^2 = 25$ et $2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 25$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $(x_n; y_n)$ définit un TRPI et montrons qu'alors: $(x_{n+1}; y_{n+1})$ définit un TRPI.

Supposons: $(x_n; y_n)$ définit un TRPI, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) => $(x_{n+1}; y_{n+1})$ définit un TRPI car " si le couple $(x ; y)$ définit un TRPI **alors** le couple $(x' ; y')$ définit également un TRPI ", d'après la question précédente.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, le couple $(x_n ; y_n)$ définit bien un TRPI.

4. Déterminons un TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017:

Nous avons: • $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$;

• $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 1 \\ y_{n+1} = 4x_n + 3y_n + 2 \end{cases}$.

Pour $n = 3$ et $n = 4$, on trouve: • $x_3 = 696$ et $y_3 = 985$

• $x_4 = 4059$ et $y_4 = 5741$.

Au total, nous retiendrons: $x_4 = 4059 > 2017$, $y_4 = 5741 > 2017$ et nous avons bien $(4059)^2 + (4060)^2 = (5741)^2$.