

www.freemaths.fr

Maths Expertes Terminale

Arithmétique



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Cryptage

1. Montrons que Bob code la lettre " N " avec le nombre 8:

La lettre N est associée au nombre entier: $x = 13$.

Le codage de la lettre N est représenté par le nombre y tel que:

$$y \equiv x(x + B)[n]$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 13(13 + 13)[33], \text{ car: } n=33 \text{ et } B=13$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 5 \times 33 + 8[33]$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 8[33].$$

Au total: Bob code bien la lettre " N " avec le nombre 8.

2. Déterminons le nombre qui code la lettre " O ":

La lettre O est associée au nombre entier: $x = 14$.

Le codage de la lettre O est représenté par le nombre y tel que:

$$y \equiv x(x + 13)[n]$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 14(14 + 13)[33]$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 11 \times 33 + 15[33]$$

$$\Leftrightarrow y \equiv 15[33].$$

Au total: Le nombre qui code la lettre " O " est 15.

Partie B: Décryptage

1. Montrons que $x(x + 13) \equiv 3 [33]$ équivaut à $(x + 23)^2 \equiv 4 [33]$:

$$x(x + 13) \equiv 3 [33] \Leftrightarrow x^2 + 13x \equiv 3 [33]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 13x + 33x \equiv 3 [33]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 13x + 33x + (23)^2 \equiv 3 + (23)^2 [33]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 46x + (23)^2 \equiv 3 + (16 \times 33 + 1) [33]$$

$$\Leftrightarrow (x + 23)^2 \equiv 4 [33].$$

Au total, nous avons bien: $x(x + 13) \equiv 3 [33] \Leftrightarrow (x + 23)^2 \equiv 4 [33]$.

2. a. Montrons l'implication demandée:

Ici, il s'agit de montrer que: $(x + 23)^2 \equiv 4 [33] \Rightarrow \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x + 23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases}$.

$$(x + 23)^2 \equiv 4 [33] \Rightarrow (x + 23)^2 - 4 \equiv 0 [33]$$

$$\Rightarrow (x + 23)^2 - 4 \equiv 0 [3 \times 11]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x + 23)^2 - 4 \equiv 0 [3] & (3 \text{ divise } (x + 23)^2 - 4) \\ (x + 23)^2 - 4 \equiv 0 [11] & (11 \text{ divise } (x + 23)^2 - 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x + 23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases}$$

Au total, l'implication demandée est bien vérifiée.

2. b. Montrons la réciproque:

$$\text{Ici, il s'agit de montrer que: } \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases} \Rightarrow (x+23)^2 \equiv 4 [33].$$

$$\begin{cases} (x+23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+23)^2 - 4 \equiv 0 [3] \\ (x+23)^2 - 4 \equiv 0 [11] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ divise } (x+23)^2 - 4 \\ 11 \text{ divise } (x+23)^2 - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{il existe un entier relatif "a" avec: } (x+23)^2 - 4 = 3 \times a \\ \text{il existe un entier relatif "b" avec: } (x+23)^2 - 4 = 11 \times b \end{cases}$$

Dans ces conditions, nous pouvons écrire: $3 \times a = 11 \times b$.

Donc 3 divise $11 \times b$.

Or, 3 et 11 sont premiers entre eux et par conséquent, d'après le **théorème de GAUSS**: 3 divise b .

D'où, il existe un entier relatif "c" tel que: $b = 3 \times c$.

Ainsi: $(x+23)^2 - 4 = 11 \times b$

$$= 11 \times (3 \times c)$$

$$= 33 \times c.$$

Et donc: $(x + 23)^2 - 4 \equiv 0 [33] \Rightarrow (x + 23)^2 \equiv 4 [33]$.

Au total, la réciproque est bien vérifiée.

2. c. Déduisons-en l'équivalence demandée:

D'après les réponses aux questions Partie B, 2. a et 2. b., nous pouvons affirmer que:

$$(x + 23)^2 \equiv 4 [33] \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x + 23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases}.$$

De plus, d'après la réponse à la question Partie B, 1.:

$$(x + 23)^2 \equiv 4 [33] \Leftrightarrow x(x + 13) \equiv 3 [33].$$

D'où, au total, nous pouvons écrire:

$$x(x + 13) \equiv 3 [33] \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 4 [3] \\ (x + 23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 23)^2 \equiv 1 [3] \\ (x + 23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases}.$$

3. a. Déterminons les nombres entiers naturels a tels que $0 \leq a < 3$ et $a^2 \equiv 1 [3]$:

Distinguons 3 cas:

- Si $a = 0$, $a^2 = 0$ et par conséquent: $a^2 \equiv 0 [3]$.
- Si $a = 1$, $a^2 = 1$ et par conséquent: $a^2 \equiv 1 [3]$.
- Si $a = 2$, $a^2 = 4 = 3 + 1$ et par conséquent: $a^2 \equiv 1 [3]$.

Au total, les nombres entiers naturels " a " demandés sont: $a = 1$ et $a = 2$.

3. b. Déterminons les nombres entiers naturels b tels que $0 \leq b < 11$ et $b^2 \equiv 4 [11]$:

Distinguons 11 cas:

- Si $b = 0$, $b^2 = 0$ et par conséquent: $b^2 \equiv 0 [11]$.
- Si $b = 1$, $b^2 = 1$ et par conséquent: $b^2 \equiv 1 [11]$.
- Si $b = 2$, $b^2 = 4$ et par conséquent: $b^2 \equiv 4 [11]$.
- Si $b = 3$, $b^2 = 9$ et par conséquent: $b^2 \equiv 9 [11]$.
- Si $b = 4$, $b^2 = 16$ et par conséquent: $b^2 \equiv 5 [11]$.
- Si $b = 5$, $b^2 = 25$ et par conséquent: $b^2 \equiv 3 [11]$.
- Si $b = 6$, $b^2 = 36$ et par conséquent: $b^2 \equiv 3 [11]$.
- Si $b = 7$, $b^2 = 49$ et par conséquent: $b^2 \equiv 5 [11]$.
- Si $b = 8$, $b^2 = 64$ et par conséquent: $b^2 \equiv 9 [11]$.
- Si $b = 9$, $b^2 = 81$ et par conséquent: $b^2 \equiv 4 [11]$.
- Si $b = 10$, $b^2 = 100$ et par conséquent: $b^2 \equiv 1 [11]$.

Au total, les nombres entiers naturels " b " demandés sont: $b = 2$ et $b = 9$.

4. a. Déduisons-en les 4 équivalences demandées:

$$\text{Nous savons que: } x(x+13) \equiv 3 [33] \Leftrightarrow \begin{cases} (x+23)^2 \equiv 1 [3] \\ (x+23)^2 \equiv 4 [11] \end{cases}.$$

Soit $(x+23)^2 \equiv 1 [3]$, d'après Partie B, 3. a., nous avons:

$$\bullet (x + 23)^2 \equiv 1[3] \Leftrightarrow a^2 \equiv 1[3]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 1[3] \\ a \equiv 4[3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 23 \equiv 1[3] \\ x + 23 \equiv 2[3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -22[3] \\ x \equiv -21[3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2[3] \\ x \equiv 0[3] \end{cases}$$

Soit $(x + 23)^2 \equiv 4[11]$, d'après Partie B, 3. b., nous avons:

$$\bullet (x + 23)^2 \equiv 4[11] \Leftrightarrow b^2 \equiv 4[11]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv 2[11] \\ b \equiv 9[11] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 23 \equiv 2[11] \\ x + 23 \equiv 9[11] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -21[11] \\ x \equiv -14[11] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1[11] \\ x \equiv 8[11] \end{cases}$$

Au total, nous avons bien:

$$\begin{cases} x \equiv 2 [3] \\ x \equiv 8 [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 [3] \\ x \equiv 1 [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 2 [3] \\ x \equiv 1 [11] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \equiv 0 [3] \\ x \equiv 8 [11] \end{cases}.$$

(1) (2) (3) (4)

4. b. Déterminons chacune de ces solutions:

4. b. b1. La solution du système (1):

La solution du système (1) est: $x = 8$.

$$\begin{cases} 8 = 2 \times 3 + 2 \\ 8 = 0 \times 11 + 8 \end{cases}$$

4. b. b2. La solution du système (2):

La solution du système (2) est: $x = 12$.

$$\begin{cases} 12 = 4 \times 3 + 0 \\ 12 = 1 \times 11 + 1 \end{cases}$$

4. b. b3. La solution du système (3):

La solution du système (3) est: $x = 23$.

$$\begin{cases} 23 = 7 \times 3 + 2 \\ 23 = 2 \times 11 + 1 \end{cases}$$

4. b. b4. La solution du système (4):

La solution du système (4) est: $x = 30$.

$$\begin{cases} 30 = 10 \times 3 + 0 \\ 30 = 2 \times 11 + 8 \end{cases}$$

5. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

Pour x allant de 0 à 32

Si le reste de la division de $x(x + 13)$ par 33 est égal à 3 alors

Afficher x

Fin Si

Fin Pour

6. a. Alice peut-elle connaître la première lettre du message envoyé par Bob ?

Non ! car l'équation $x(x + 13) \equiv 3 [33]$ admet plusieurs solutions, d'après Partie B, 4.

Donc, il n'y a pas unicité de la première lettre.

6. b. Le " chiffre de RABIN " est-il utilisable pour décoder un message lettre par lettre ?

Dans ces conditions: non, le " chiffre de RABIN " n'est pas utilisable pour décoder un message lettre par lettre.