Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 7

CORRECTION

1. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

1	$A \leftarrow 0$
2	$B \leftarrow 1$
3	Pour i allant de 1 à n
4	$\quad C \leftarrow A + B$
5	$\quad A \leftarrow B$
6	$\quad B \leftarrow C$
7	Fin Pour

2. a. Calculons A^2, A^3 et A^4:

- $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- $A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. b. Vérifions que $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. a. a1. Calculons $A^p \times A^q$:

$A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix}$, pour tous entiers p et q non nuls

$$= \begin{pmatrix} a_{p+1} \times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} \times a_q + a_p \times a_{q-1} \\ a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q & a_p \times a_q + a_{p-1} \times a_{q-1} \end{pmatrix}.$$

3. a. a2. Déduisons-en que $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$:

Nous savons que: $A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+1} \times a_{q+1} + a_p \times a_q & a_{p+1} \times a_q + a_p \times a_{q-1} \\ a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q & a_p \times a_q + a_{p-1} \times a_{q-1} \end{pmatrix}$.

De plus, nous avons: $A^p \times A^q = A^{(p+q)}$

cad: $A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}$.

Par identification, on obtient: $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$.

Au total, pour tous entiers p et q non nuls, nous avons bien:

$$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q.$$

3. b. Déduisons-en que si un entier non nul Γ divise les entiers a_p et a_q, alors Γ divise également a_{p+q}:

- Si Γ divise l'entier a_p, nous pouvons alors écrire: $a_p = x \cdot \Gamma$, $x \in \mathbb{N}$.
- Si Γ divise l'entier a_q, nous pouvons alors écrire: $a_q = y \cdot \Gamma$, $y \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions: $a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$

$= (x \cdot \Gamma) \times a_{q+1} + a_{p-1} \times (y \cdot \Gamma)$

$= \Gamma \times [\, x \times a_{q+1} + y \times a_{p-1} \,]$

$= \Gamma \times [\text{ Liban }]$, avec: $\text{Liban} = x \times a_{q+1} + y \times a_{p-1}$.

Or: Liban est un entier naturel.

D'où: si un entier naturel non nul Γ divise les entiers naturels a_p et a_q, alors il divise bien l'entier naturel a_{p+q} car $a_{p+q} = \Gamma \times [\text{ Liban }]$, Liban $\in \mathbb{N}$.

3. c. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_p divise a_{np}:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel non nul n: a_p divise a_{np} ".

Initialisation: • Quand $n = 1$: $a_p = a_p$ et $a_{np} = a_p$.

• Donc a_p divise bien a_{np} car: $a_p = 1 \times a_p$, $1 \in \mathbb{N}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que a_p divise a_{np} et montrons qu'alors: a_p divise $a_{(n+1)p}$.

Supposons: a_p divise a_{np}, pour un entier naturel non nul n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow a_{np} = z \cdot a_p,\ z \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{(n+1)p} = a_{np+p}$$

$$= a_{np} \times a_{p+1} + a_{np-1} \times a_p,$$ d'après la relation mise en évidence à la question **3. b.**

$$\Rightarrow a_{(n+1)p} = z \cdot a_p \times a_{p+1} + a_{np-1} \times a_p$$

$$\Rightarrow a_{(n+1)p} = a_p \times [\, z \times a_{p+1} + a_{np-1} \,] \quad (2).$$

Or: $[\, z \times a_{p+1} + a_{np-1} \,]$ est un entier naturel car z, a_{p+1} et a_{np-1} sont des entiers naturels.

D'où: $(2) \Rightarrow a_{(n+1)p} = w \cdot a_p$, $w \in \mathbb{N}$. **(a_p divise $a_{(n+1)p}$)**

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_p divise a_{np}.

4. **Que penser de la réciproque de la propriété démontrée à la question précédente ?**

Notons que la réciproque s'écrit: " Soit n un entier supérieur ou égal à 5. Si a_n n'est pas un nombre premier, alors n est un entier naturel qui n'est pas premier ".

Or ici:
- $a_{19} = 4181 = 37 \times 113$,
- $19 \geqslant 5$,
- a_{19} n'est pas un nombre premier,
- **19 est un entier naturel qui est premier !**

Donc: la réciproque est fausse !