Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 5

CORRECTION

Partie A:

1. Déterminons un couple solution (x ; y) avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$:

L'équation que doivent vérifier les entiers naturels x et y est: $x^2 - 8y^2 = 1$ (E).

Un couple (x ; y) est: $x = 1 \in \mathbb{N}$ et $y = 0 \in \mathbb{N}$.

Et nous avons bien: $(1)^2 - 8\,(0)^2 = 1$.

Au total, un couple d'entiers naturels solution de l'équation (E) est:

$$(x\,;y) = (1\,;0).$$

2. a. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le couple (x_n ; y_n) est solution de l'équation (E):

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: (x_n ; y_n) est solution de l'équation (E) ".
(**cad**: $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$)

Initialisation: • Le couple (x_0 ; y_0) = (1 ; 0) est solution de l'équation (E) d'après la question précédente.

• **Donc vrai au rang " 0 ".**

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$

et montrons qu'alors: $x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 1$.

Supposons: $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Nous savons que: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ **cad**: $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 8y_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n \end{cases}$.

$(1) \Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8\,(x_n + 3y_n)^2$

$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 48\,x_n y_n - 8\,(x_n^2 + 9y_n^2 + 6\,x_n y_n)$

$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = x_n^2 - 8y_n^2$

$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = 1$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$.

2. b. Démontrons que pour tout entier naturel n, on a $x_{n+1} > x_n$:

Nous savons que, pour tout entier naturel n:

- $x_n > 0$,
- $x_{n+1} = 3x_n + 8y_n$,
- y_n est un entier naturel et donc $y_n \geqslant 0$.

Dans ces conditions: $x_{n+1} - x_n = 2x_n + 8y_n > 0$, **car**: $x_n > 0$ et $y_n \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n: $x_{n+1} > x_n$.

Et donc, nous pouvons affirmer que la suite (x_n) est strictement croissante.

3. Déduisons-en que l'équation (E) admet une infinité de couples solutions:

Nous savons que pour tout entier naturel n:
- $x_{n+1} > x_n$,
- $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$.

Ainsi, les termes de la suite (x_n) sont **tous distincts** et rangés par ordre croissant: $x_{n+1} > x_n$.

Et à chaque $x_n > 0$, correspondra un $y_n \geq 0$ tel que: $x_n^2 - 8y_n^2 = 1$.

Par conséquent: l'équation (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B:

1. Vérifions qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants:

Un entier naturel " n " est puissant lorsque, pour tout diviseur premier p de n, p^2 divise n.

Dans ces conditions les deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants sont: **8 et 9**.

En effet:
- pour 8: $p = 2$ et donc $p^2 = 4$,
- pour 9: $p = 3$ et donc $p^2 = 9$.

Ainsi, les deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants sont: 8 et 9.

2. Montrons que l'entier naturel $n = a^2 b^3$ est un nombre puissant:

a et b sont deux entiers naturels et $n = a^2 b^3$.

Soit p un diviseur premier de n.

Dans ce cas, nous pouvons écrire: $n = p \cdot k$, $k \in \mathbb{N}$.

$n = p \cdot k \iff a^2 b^3 = p \cdot k$.

Donc p divise " **a** " ou p divise " **b** ".

Distinguons 2 cas:

- **p divise " a ":**

Dans ce cas: $a = p \cdot p_1$, $p_1 \in \mathbb{N}$.

D'où: $n = (p \cdot p_1)^2 \cdot b^3$
$= p^2 \cdot (p_1^2 \cdot b^3)$, avec: $p_1^2 \cdot b^3 \in \mathbb{N}$ ($p_1 \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$).

Donc ici: p divise n et p^2 divise n.

Par conséquent, n est un nombre puissant.

- **p divise " b ":**

Dans ce cas: $b = p \cdot p_2$, $p_2 \in \mathbb{N}$.

D'où: $n = a^2 \cdot (p \cdot p_2)^3$
$= p^2 \cdot (a^2 \cdot p \cdot p_2^3)$, avec: $a^2 \cdot p \cdot p_2^3 \in \mathbb{N}$ ($a \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $p_2 \in \mathbb{N}$).

Donc ici: p divise n et p^2 divise n.

Par conséquent, n est un nombre puissant.

Au total: l'entier naturel $n = a^2 b^3$ est un nombre puissant.

3. Montrons que $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants:

En ce qui concerne x^2:

x est un entier naturel strictement positif.

Soit p_1 un diviseur de x.

Dans ce cas, nous pouvons écrire: $x = p_1 \times k_1$, $k_1 \in \mathbb{N}$.

D'où: $x^2 = p_1 \times (p_1 \times k_1)^2$, avec: $(p_1 \times k_1)^2 \in \mathbb{N}$.

Et: $x^2 = p_1^2 \times (k_1)^2$, avec: $k_1^2 \in \mathbb{N}$.

Donc: p_1 divise x^2 et p_1^2 divise x^2.

Par conséquent: x^2 est un entier naturel puissant.

En ce qui concerne $x^2 - 1$:

$(x\ ;y)$ vérifie l'équation (E).

D'où: $x^2 - 8y^2 = 1$ ou encore: $x^2 - 1 = 8y^2 = 2 \times 2^2 \times y^2$.

Comme y est un entier naturel, y^2 est aussi un entier naturel.

D'où: $x^2 - 1 = 2 \times (2^2 \times y^2)$, avec: $2^2 \times y^2 \in \mathbb{N}$.

Et: $x^2 - 1 = 2^2 \times (2 \times y^2)$, avec: $2 \times y^2 \in \mathbb{N}$.

Donc: 2 divise $x^2 - 1$ et 2^2 divise $x^2 - 1$.

Par conséquent: $x^2 - 1$ est un entier naturel puissant.

Au total: $x^2 - 1$ et x^2 sont bien des entiers naturels consécutifs et ils sont puissants.

4. a. Montrons qu'il existe une infinité de couples de nombres consécutifs puissants:

D'après **Partie A, 3.** et **Partie B, 3.**, nous pouvons affirmer que:

" il existe une infinité d'entiers naturels (strictement positifs) x tels que $x^2 - 1$ et x^2 soient des entiers consécutifs puissants ".

En d'autres termes: il existe bien une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

4. b. Déterminons deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018:

D'après **Partie B, 3.**: " si $(x\ ;y)$ est un couple solution de l'équation (E), alors $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants ".

Nous allons, par tâtonnement, chercher un x qui vérifie (E) et est tel que:

$$x^2 - 1 > 2018.$$

Nous savons que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;y_n)$ $(X_{n+1} = A \cdot X_n)$ est solution de l'équation (E).

Dans ces conditions:

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et: $3^2 - 1 = 8 < 2018$

- $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix}$ et: $17^2 - 1 = 288 < 2018$

- $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 35 \end{pmatrix}$ et: $99^2 - 1 > 2018$.

En conclusion, les deux nombres consécutifs puissants demandés sont:

$$x^2 - 1 = 99^2 - 1 = 9800 \text{ et } x^2 = 99^2 = 9801.$$