

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Arithmétique



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# ARITHMÉTIQUE

## Partie A

On considère l'équation suivante dont les inconnues  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels :

$$x^2 - 8y^2 = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer un couple solution  $(x ; y)$  où  $x$  et  $y$  sont deux entiers naturels.
2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On définit les suites d'entiers naturels  $(x_n)$  et  $(y_n)$  par :

$$x_0 = 1, y_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , le couple  $(x_n; y_n)$  est solution de l'équation  $(E)$ .
  - b. En admettant que la suite  $(x_n)$  est à valeurs strictement positives, démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $x_{n+1} > x_n$ .
3. En déduire que l'équation  $(E)$  admet une infinité de couples solutions.

## Partie B

Un entier naturel  $n$  est appelé un nombre *puissant* lorsque, pour tout diviseur premier  $p$  de  $n$ ,  $p^2$  divise  $n$ .

1. Vérifier qu'il existe deux nombres entiers consécutifs inférieurs à 10 qui sont puissants.

L'objectif de cette partie est de démontrer, à l'aide des résultats de la **partie A**, qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers naturels consécutifs puissants et d'en trouver quelques exemples.

2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels.  
Montrer que l'entier naturel  $n = a^2 b^3$  est un nombre puissant.
3. Montrer que si  $(x ; y)$  est un couple solution de l'équation  $(E)$  définie dans la **partie A**, alors  $x^2 - 1$  et  $x^2$  sont des entiers consécutifs puissants.
4. Conclure quant à l'objectif fixé pour cette partie, en démontrant qu'il existe une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.  
Déterminer deux nombres entiers consécutifs puissants supérieurs à 2018.