Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = 1$, $v_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560

1. Conjecturer les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

2. On admet que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+3} = 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} = 15u_n + 26v_n \end{cases}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n : $v_{n+3} \equiv v_n \ [5]$.

3. Soit r un entier naturel fixé. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel q, $v_{3q+r} \equiv v_r \ [5]$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n le terme v_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.

5. Conclure quant à l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités des termes de la suite (v_n).

Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice M.

Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Dans ce cas, $\sqrt{3}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls, avec q le plus petit entier naturel possible.

1. Montrer que $q < p < 2q$.
2. On admet que la matrice M est inversible. Donner son inverse M^{-1} (aucune justification n'est attendue).

Soit le couple (p', q') défini par $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

3. **a.** Vérifier que $p' = 2p - 3q$ et que $q' = -p + 2q$.
   b. Justifier que (p', q') est un couple d'entiers relatifs.
   c. On rappelle que $p = q\sqrt{3}$. Montrer que $p' = q'\sqrt{3}$.
   d. Montrer que $0 < q' < q$.
   e. En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.