Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse

35

Correction

Partie A. Représentation de quelques ensembles

Dans cette partie, on considère le réseau $R_{8,8}$ des 81 points à coordonnées entières telles que $0 \leq x \leq 8$ et $0 \leq y \leq 8$.

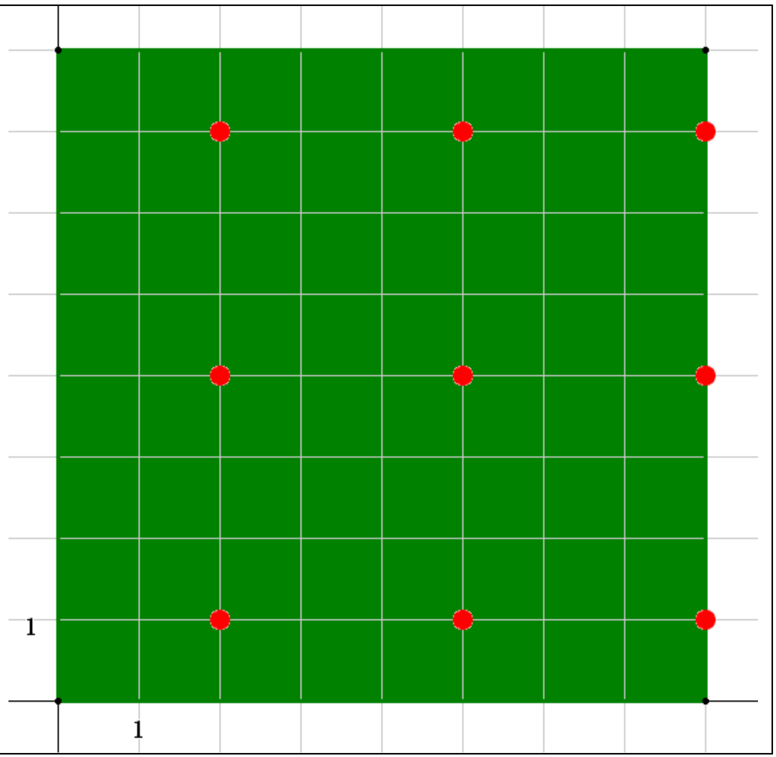
Nous rappelons que deux nombres entiers relatifs *a* et *b* sont « congrus modulo 3 » si et seulement si il existe un entier relatif *k* tel que $a - b = 3k$.

Nous noterons respectivement E_1, E_2 et E_3 les ensembles recherchés dans les questions 1, 2 et 3.

1. Représentons l'ensemble E_1 des points de ce réseau tels que $\begin{cases} x \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ y \equiv 1 \ \ (mod\ 3) \end{cases}$:

L'ensemble E_1 est l'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\{2\,;5\,;8\} \times \{1\,;4\,;7\}$.

Il est représenté en rouge sur le graphique ci-contre.

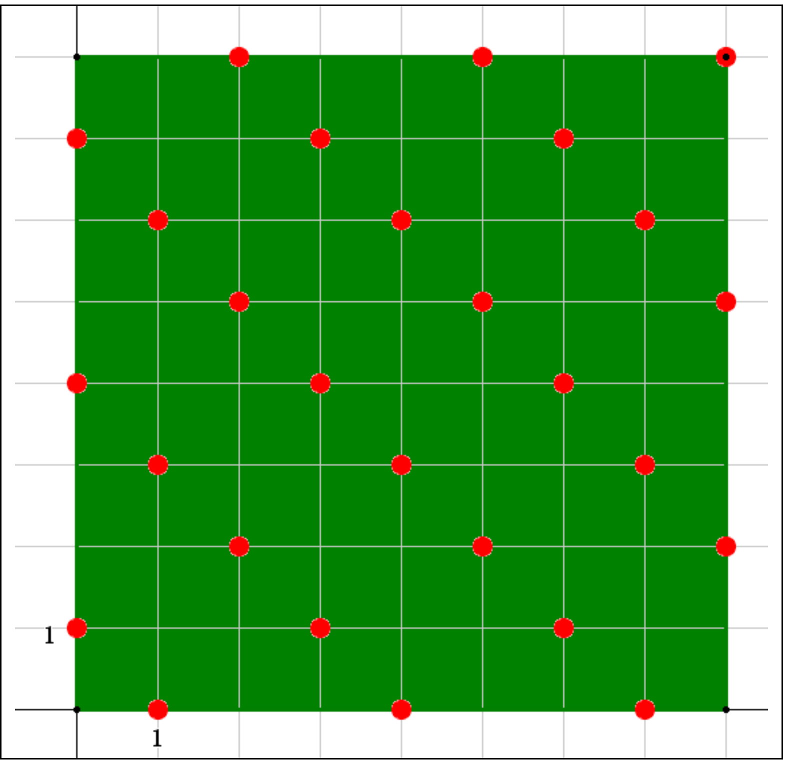


2. Représentons l'ensemble E_2 des points de ce réseau tels que $x + y \equiv 1 \pmod 3$:

Suivant que x est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, y est congru, respectivement, à 1, 0 ou 2.

Les points de E_2 s'alignent sur des droites d'équation :
$x + y = 1 + 3k$ où k est un entier relatif.

Il est représenté en rouge sur le graphique ci-contre.

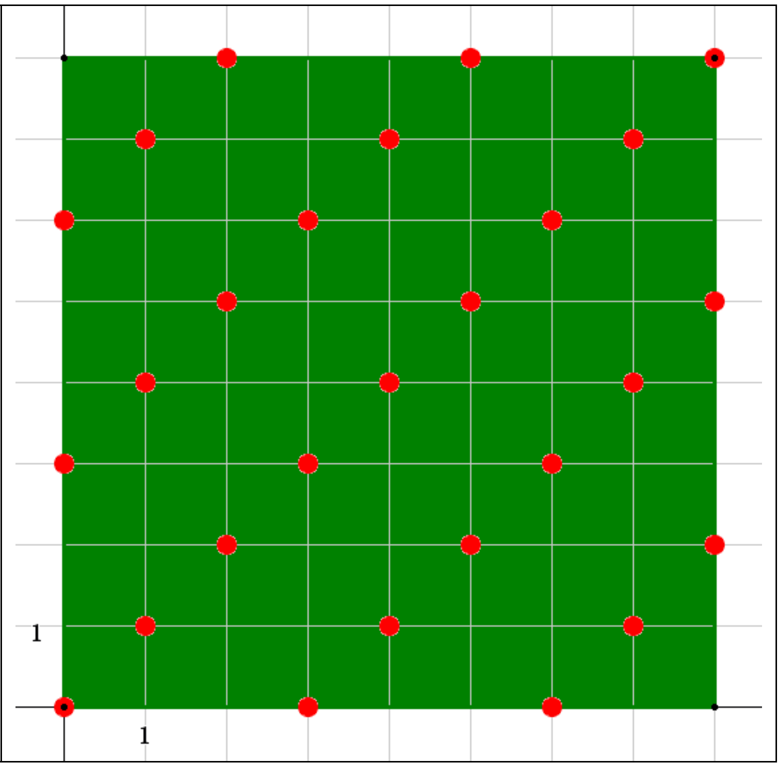


3. Représentons l'ensemble E_3 des points de ce réseau tels que $x \equiv y \pmod 3$:

Suivant que x est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, y est congru, respectivement, à 0, 1 ou 2.

Les points de E_3 s'alignent sur des droites d'équation :
$y = x + 3k$ où k est un entier relatif.

Il est représenté en rouge sur le graphique ci-contre.



Partie B. Résolution d'une équation

Soit *a, b, c* trois entiers relatifs non nuls, les entiers *a* et *b* étant premiers entre eux.
La méthode générale de résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $ax - by = c$ **(E)** est la suivante :

- On recherche un couple d'entiers relatifs $(x_0,\ y_0)$ solution particulière de **(E)**.
- Un couple $(x,\ y)$ est solution de **(E)** si et seulement si le couple $(x - x_0,\ y - y_0)$ est solution de l'équation $aX - bY = 0$ **(H)**, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(kb,\ ka)$ *k* est un entier relatif[1].
- Les couples solutions de **(E)** sont les couples de la forme : $(x_0 + kb,\ y_0 + ka)$ où *k* est un entier relatif.

L'équation (E) est ici l'équation $7x - 4y = 1$. Les entiers 7 et 4 sont des entiers premiers entre eux, le théorème de Bézout garantit que cette équation admet des solutions.

1. Proposons un couple solution particulier :

De l'égalité $7 \times 3 - 4 \times 5 = 21 - 20 = 1$ nous déduisons que :

Le couple $(x_0 = 3\ ;\ \ y_0 = 5)$ est un couple solution de (E).

2. Déterminons l'ensemble des solutions de (E) :

Un couple $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement si le couple $(X = x - 3,\ Y = y - 5)$ est solution de l'équation $7X - 4Y = 0$, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(4k,\ \ 7k)$ où *k* est un entier relatif.

Un couple d'entiers relatifs $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que $\begin{cases} x - 3 = 4k \\ y - 5 = 7k \end{cases}$.

Les couples solutions de l'équation **(E)** sont les couples de la forme $(3 + 4k,\ 5 + 7k)$ où *k* est un entier relatif.

3. Montrons que le réseau $R_{4,7}$ contient un et un seul point dont les coordonnées sont un couple solution de (E) :

Le point $M_0\ (3\ ;5)$, dont les coordonnées constituent le couple-solution particulier de **(E)** proposé à la **question 1** appartient au réseau $R_{4,7}$.

$R_{4,7}$ contient au moins un point dont les coordonnées sont solution de (E).

[1] **Pour mémoire, résolution de l'équation homogène $\boldsymbol{aX - bY = 0}$.** Soit (*X, Y*) un couple solution. L'entier *a* divise *bY* et est premier avec *b*, donc il divise *Y* (théorème de Gauss). Il existe un entier relatif *k* tel que $Y = ka$. De ce fait : $aX = b \times (ka)$ d'où on déduit, puisque *a* est non nul, $X = kb$. Le couple (X, Y) est nécessairement de la forme (ka, kb) où *k* est un entier relatif. Réciproquement, on vérifie sans peine qu'un couple de cette forme est solution de l'équation $aX - bY = 0$.

La double inégalité $0 \leq 3 + 4k \leq 4$ est équivalente à : $-\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$.

Or, l'intervalle $\left[-\frac{3}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right]$ contient un entier et un seul : l'entier 0 est l'unique entier relatif qui vérifie la double inégalité $-\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$. Il n'existe pas de couple-solution de **(E)** autre que (3 ; 5) qui soit susceptible d'être un couple de coordonnées d'un point de $R_{4,7}$.

$R_{4,7}$ contient exactement un point dont les coordonnées sont solution de **(E)**, le point $M_0\ (3\,;5)$.

Partie C. Une propriété des points de la diagonale du réseau

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'origine *O*. Le point *A* est le point de coordonnées $(a,\ b)$ où *a* et *b* sont tous deux des entiers strictement positifs.

Rappelons la définition paramétrique d'une droite déterminée par deux points et celle du segment d'extrémités ces deux mêmes points. Dans le présent contexte :

- La droite (*OA*)] est l'ensemble des points *M* du plan tels qu'il existe un réel λ (quelconque) vérifiant : $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$.
- Le segment [*OA*] est l'ensemble des points *M* du plan tels qu'il existe un réel λ appartenant à l'intervalle [0 ; 1] (autrement dit tel que $0 \leq \lambda \leq 1$) vérifiant : $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$.

Remarquons d'autre part que l'équation $bx - ay = 0$ est une équation cartésienne de la droite (*OA*). En effet, en tant qu'équation au premier degré en *x* et *y*, il s'agit de l'équation cartésienne d'une droite et les coordonnées de chacun des deux points *O* et *A* vérifient cette équation : la droite d'équation $bx - ay = 0$ passe par *O* et par *A*, cette droite est la droite (*OA*).

La relation $bx = ay$ figurant dans les conditions indiquées par l'énoncé caractérise l'appartenance à la droite (*OA*).

1. Caractérisons l'ensemble des points du segment [*OA*] :

Supposons qu'un point *M* de coordonnées $(x,\ y)$ appartienne au segment [*OA*].

- Il est sur la droite (*OA*) donc la relation $bx = ay$ est vérifiée.
- Il existe un réel λ appartenant à l'intervalle [0 ; 1] (autrement dit tel que $0 \leq \lambda \leq 1$) vérifiant : $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$.

Or : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath}$ et $\lambda\overrightarrow{OA} = \lambda(a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath}) = \lambda a.\vec{\imath} + \lambda b.\vec{\jmath}$. Donc : $\begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \end{cases}$

Les nombres *a* et *b* étant tous deux strictement positifs, la double inégalité $0 \leq \lambda \leq 1$ implique les deux doubles inégalités $\begin{cases} 0 \leq \lambda a \leq a \\ 0 \leq \lambda b \leq b \end{cases}$ donc les deux doubles inégalités $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$.

On en déduit qu'alors les trois conditions $\begin{cases} bx = ay \\ 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$ sont satisfaites.

Supposons réciproquement que les coordonnées $(x,\ y)$ de *M* vérifient les conditions $\begin{cases} bx = ay \\ 0 \leq x \leq a. \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

La relation $bx = ay$ implique que $y = \frac{b}{a}x$.

Alors : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} = x.\vec{\imath} + \frac{b}{a}x.\vec{\jmath} = \frac{x}{a}(a.\vec{\imath} + b.\vec{\jmath}) = \frac{x}{a}\overrightarrow{OA}$.

- Il existe un réel λ tel que : $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA}$, c'est le réel $\lambda = \frac{x}{a}$, ce qui prouve l'alignement des points *O, A, M*.
- La condition $0 \leq x \leq a$ implique $0 \leq \frac{x}{a} \leq 1$, c'est-à-dire que $0 \leq \lambda \leq 1$.

On en déduit qu'alors le point *M* appartient au segment [*OA*].

En conclusion des deux démonstrations, directe et réciproque :

Un point *M* de coordonnées $(x,\ y)$ appartient au segment [*OA*] si et seulement si $\begin{cases} bx = ay \\ 0 \leq x \leq a. \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$

NB. Dès lors que la relation $bx = ay$ est vérifiée, sachant que *a* et *b* sont tous deux strictement positifs, la double inégalité $0 \leq x \leq a$ est équivalente à la double inégalité $0 \leq y \leq b$.

On peut donc affaiblir les conditions énoncées : $\begin{cases} bx = ay \\ 0 \leq x \leq a \quad ou\ bien\ \ 0 \leq y \leq b \end{cases}$.

En particulier, les conditions énoncées peuvent se résumer à deux : $\begin{cases} bx = ay \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$.

2 et 3.

Les points du segment [*OA*] qui appartiennent au réseau $R_{a,b}$ sont ceux dont les coordonnées sont des nombres entiers. Nous sommes amenés à rechercher quels sont dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les couples-solutions (*x, y*) de l'équation $bx = ay$ puis à repérer ceux pour lesquels *x* est entre 0 et *a*.

2. Montrons que si *a* et *b* sont premiers entre eux, *O* et *A* sont les deux seuls points du segment [*OA*] qui appartiennent à $R_{a,b}$:

Si *a* et *b* sont premiers entre eux, l'équation $bx = ay$ admet dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour solutions les couples $(ka,\ kb)$ où *k* est un entier relatif. En effet, si $bx = ay$, l'entier *b* divise *ay* et est premier avec *a* ; d'après le théorème de Gauss, il divise *y*. Il existe un entier relatif *k* tel que $y = kb$, relation qui implique que $x = ka$.

La double inégalité $0 \leq ka \leq a$ est vérifiée uniquement pour les valeurs $k = 0$ et $k = 1$.

Seules, les extrémités *O* et *A* du segment appartiennent à $R_{a,b}$.

3. Montrons que si *a* et *b* ne sont pas premiers entre eux, le segment [*OA*] contient au moins un autre point de $R_{a,b}$:

Si *a* et *b* ne sont pas premiers entre eux, leur PGCD Δ est strictement supérieur à 1. Soit *a'* et *b'* les entiers tels que : $\begin{cases} a = \Delta a' \\ b = \Delta b' \end{cases}$.

On sait que, Δ étant le PGCD de *a* et *b*, ces entiers *a'* et *b'* sont premiers entre eux.

L'équation $bx = ay$ est équivalente à l'équation $b'x = a'y$ et a pour solutions les couples $(ka',\ kb')$

La double inégalité $0 \leq ka' \leq a$ s'écrit $0 \leq ka' \leq \Delta a'$ et est vérifiée pour les $(\Delta + 1)$ valeurs $k = 0$, $k = 1$ …, $k = \Delta$. Puisque Δ est strictement supérieur à 1, cette double inégalité est vérifiée pour au moins trois valeurs.

Le segment [*OA*] contient au moins un troisième point de $R_{a,b}$, distinct de *O* et de *A*.