Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 35

ÉNONCÉ

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle " réseau " associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d un repère orthonormal, dont les coordonnées (x, y) sont des entiers vérifiant les conditions:

$$0 \leqslant x \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant b.$$

On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

Partie A: Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette partie les réponses sont attendues sous la forme d'un graphique.

Représenter graphiquement les points $M(x ; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant:

1. $x \equiv 2 \pmod 3$ et $y \equiv 1 \pmod 3$,

2. $x + y \equiv 1 \pmod 3$,

3. $x \equiv y \pmod 3$.

Freemaths : Tous droits réservés

Partie B: Résolution d'une équation

On considère l'équation **(E)**: $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0 ; y_0)$ solution de l'équation **(E)**.

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation **(E)**.

3. Démontrer que l'équation **(E)** admet une unique solution $(x ; y)$ pour laquelle le point $M (x ; y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

Partie B: Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

Si a et b deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale [OA] du réseau associé $R_{a,b}$, avec $O (0 ; 0)$ et $A (a ; b)$.

1. Démontrer que les points du segment [OA] sont caractérisés par les conditions:

$$0 \leqslant x \leqslant a ; 0 \leqslant y \leqslant b ; ay = bx.$$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,b}$.

3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau.

Freemaths : Tous droits réservés