Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse 34

Correction

Partie A. Résolution d'une équation

L'équation **(E)** est l'équation $11x - 26y = 1$ dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Notons que les entiers 11 et 26 sont des entiers premiers entre eux. En effet, 11 est un nombre premier, il est premier avec tout entier qu'il ne divise pas, en particulier avec 26.

1. Vérifions que $(-7\ ;\ -3)$ est solution de (E) :

$11 \times (-7) - 26 \times (-3) = -77 + 78 = 1$ **.**

Le couple $(-7\ ;\ -3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. Résolvons l'équation (E) :

Soit *a, b, c* trois entiers relatifs non nuls, les entiers *a* et *b* étant premiers entre eux, comme c'est le cas de 11 et 26.
La méthode générale de résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $ax - by = c$ **(E)** quand on en connaît déjà un couple solution $(x_0,\ y_0)$ particulier est la suivante :

- Un couple $(x,\ y)$ est solution de **(E)** si et seulement si le couple $(x - x_0,\ y - y_0)$ est solution de l'équation $aX - bY = 0$ **(H)**, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(kb,\ ka)$ *k* est un entier relatif[1].
- Les couples solutions de **(E)** sont les couples de la forme : $(x_0 + kb,\ y_0 + ka)$ où *k* est un entier relatif.

En l'occurrence, nous disposons du couple solution particulier $(x_0 = -7\ ;\ y_0 = -3)$.

Un couple $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement si le couple $(X = x + 7,\ Y = y + 3)$ est solution de l'équation $5X - 26Y = 0$, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(26k,\ 11k)$ où *k* est un entier relatif.

[1] **Pour mémoire, résolution de l'équation homogène $\boldsymbol{aX - bY = 0}$.** Soit *(X, Y)* un couple solution. L'entier *a* divise *bY* et est premier avec *b*, donc il divise *Y* (théorème de Gauss). Il existe un entier relatif *k* tel que $Y = ka$. De ce fait : $aX = b \times (ka)$ d'où on déduit, puisque *a* est non nul, $X = kb$. Le couple (X, Y) est nécessairement de la forme (ka, kb) où *k* est un entier relatif. Réciproquement, on vérifie sans peine qu'un couple de cette forme est solution de l'équation $aX - bY = 0$.

Un couple d'entiers relatifs $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $\begin{cases} x+7=26k \\ y+3=11k \end{cases}$.

Les couples solutions de l'équation **(E)** sont les couples de la forme $(-7+26k,\ -3+11k)$ où k est un entier relatif.

3. Déterminons le couple solution $(u\,;v)$ tel que $0 \le u \le 25$:

Soit $(u=-7+26k,\ v=-3+11k)$ un couple solution de l'équation tel que u est, au sens large, entre 0 et 25.

La double inégalité $0 \le -7+26k \le 25$ est équivalente à : $\frac{7}{26} \le k \le \frac{16}{13}$.

Or, l'intervalle $\left[\frac{7}{26}\ ;\ \frac{16}{13}\right]$ contient un entier et un seul : un et un seul entier relatif vérifie cette double inégalité, c'est l'entier 1.

Il existe un et un seul couple $(u\,;v)$ solution de l'équation tel que $0 \le u \le 25$, le couple $(19\,;8)$.

Partie B. Codage et décodage

1. Codons la lettre « W» :

	W
Associé numérique	**22**
Image par la fonction $x \to 11x+8$	**250**
Reste de la division euclidienne par 26	**16**
Retour à l'alphabet	**Q**

Nous nous sommes aidés de la division euclidienne : $250 = 9 \times 26 + 16$.

La lettre « W » est codée par « Q ».

2.a Etudions la relation entre les deux congruences proposées :

NB. Nous interprétons la question posée ainsi : « Montrer que, quels que soient les entiers relatifs x et j, la congruence $11x \equiv j\ \ (modulo\ 26)$ est équivalente à la congruence $x \equiv 19j\ \ (modulo\ 26)$ ».
Il est donc question de deux entiers relatifs x et j liés par une certaine congruence.

D'après les résultats de la partie A, le couple (19, 8) est une solution de l'équation (E), ce qui signifie que ce couple vérifie la relation suivante : $11 \times 19 - 26 \times 8 = 1$.

Appliquons à cette relation la congruence modulo 26. Nous obtenons : $11 \times 19 \equiv 1\ \ (modulo\ 26)$.
Les deux entiers 11 et 19 se « neutralisent » modulo 26. Exploitons cette propriété.

Soit x et j deux entiers liés par la congruence $11x \equiv j\ \ (modulo\ 26)$. Multiplions par 19 les deux membres de cette congruence.
Nous obtenons, en raison de la compatibilité avec la multiplication de la relation de congruence, $19 \times 11x \equiv 19j\ \ (modulo\ 26)$ et donc $x \equiv 19j\ \ (modulo\ 26)$.

Soit réciproquement *x* et *j* deux entiers liés par la congruence $x \equiv 19j \ \ (modulo\ 26)$. Multiplions par 11 les deux membres de cette congruence.
Nous obtenons, en raison de la compatibilité avec la multiplication de la relation de congruence, $11x \equiv 11 \times 19j \ \ (modulo\ 26)$ et donc $11x \equiv j \ \ (modulo\ 26)$.

Les deux congruences $x \equiv 19j \ \ (modulo\ 26)$ et $11x \equiv j \ \ (modulo\ 26)$ sont équivalentes.

Modulo 26, l'une exprime *x* en fonction de *j*, l'autre exprime *j* en fonction de *x*.

2.b. Déduisons-en un procédé de décodage :

Soit *y* un élément de l'ensemble $\{0\ ;\ 1;\ ...\ ;\ 25\}$. Supposons qu'il soit l'image d'un certain élément *x* par la procédure de codage. Cela signifie qu'il est le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26.

Nous avons la relation : $11x + 8 \equiv y \ \ (modulo\ 26)$, soit : $11x \equiv y - 8 \ \ (modulo\ 26)$ ou, aussi bien, $11x \equiv y + 18 \ \ (modulo\ 26)$ car les entiers -8 et 18 sont congrus modulo 26.

D'après la question 2.a, cette congruence est équivalente à : $x \equiv 19 \times (y + 18) \ \ (modulo\ 26)$

Or, $19 \times 18 = 342 = 13 \times 26 + 4$.

Nous pouvons en déduire : $x \equiv 19y + 4 \ \ (modulo\ 26)$

Une procédure de décodage est la suivante :

La lettre à décoder ayant pour associé numérique le nombre *y*,

On calcule $19y + 4$.
On calcule le reste *x* de la division euclidienne de $19y + 4$ par 26
Ce nombre est l'associé numérique de la lettre qui a été codée.

2.c. Décodons la lettre « W » :

	W	**Q**
Associé numérique	**22**	**16**
Image par la fonction $x \to 19y + 4$	**422**	**308**
Reste de la division euclidienne par 26	**6**	**22**
Retour à l'alphabet	**G**	**W**

Nous nous sommes aidés de la division euclidienne : $422 = 16 \times 26 + 6$

La lettre « W » code la lettre « G ».

NB. Nous avons (facultativement) la possibilité de vérifier que le procédé de décodage fonctionne bien en décodant la lettre « Q ». Nous devons retrouver la lettre « W » codée dans la question 1. C'est ce que nous avons fait, en vert, dans la colonne la plus à droite du tableau.