Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse 33

Correction

1. L'équation **(E)** est l'équation $11x - 7y = 5$ dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1.a. Justifions l'existence d'un couple solution de l'équation (E) :

Les deux nombres entiers 7 et 11 sont premiers entre eux. (Le fait qu'il s'agit de deux nombres premiers distincts justifie cette propriété).
Nous pouvons appliquer le théorème de Bézout : Puisque 11 et 7 sont premiers entre eux, il existe un couple $(u_1,\ v_1)$ de nombres entiers relatifs tels que $11u_1 + 7v_1 = 1$.

L'existence d'un tel couple étant justifiée :

- Le couple $(u_5,\ v_5) = (5u_1,\ 5v_1)$ vérifie la relation $11u_5 + 7v_5 = 5$.

- Le couple $(u,\ v) = (u_5,\ -v_5)$ est une solution particulière de l'équation (**E**).

1.b. Trouvons un tel couple, qui constituera une solution particulière de (E) :

NB. Délibérément, nous suivrons la démarche décrite ci-dessus. Nous proposerons un couple vérifiant la relation de Bézout d'où nous déduirons un couple solution de l'équation.

- Le couple $(u_1,\ v_1) = (2, -3)$ par exemple vérifie à l'égard des nombres premiers entre eux 11 et 7 la relation de Bézout : $11 \times 2 + 7 \times (-3) = 22 - 21 = 1$.
- Le couple $(u_5,\ v_5) = (10, -15)$ vérifie la relation $11u_5 + 7v_5 = 5$.

- Le couple $(u,\ v) = (10,\ 15)$ est une solution particulière de l'équation **(E)**.

On peut vérifier explicitement : $11 \times 10 - 7 \times 15 = 110 - 105 = 5$.

1.c. Résolvons l'équation (E) :

Soit *a, b, c* trois entiers relatifs non nuls, les entiers *a* et *b* étant premiers entre eux.

La méthode générale de résolution dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $ax - by = c$ **(E)** quand on en connaît déjà un couple solution $(x_0,\ y_0)$ particulier est la suivante :

- Un couple $(x,\ y)$ est solution de **(E)** si et seulement si le couple $(x - x_0,\ y - y_0)$ est solution de l'équation $aX - bY = 0$ **(H)**, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(kb,\ ka)$ k est un entier relatif[1].
- Les couples solutions de **(E)** sont les couples de la forme : $(x_0 + kb,\ y_0 + ka)$ où *k* est un entier relatif.

En l'occurrence, nous disposons du couple solution particulier $(x_0 = 10;\ y_0 = 15)$.

Un couple $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement si le couple $(X = x - 10,\ Y = y - 15)$ est solution de l'équation $11X - 7Y = 0$, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(7k,\ 11k)$ où *k* est un entier relatif.

Un couple d'entiers relatifs $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement s'il existe un entier relatif *k* tel que $\begin{cases} x - 10 = 7k \\ y - 15 = 11k \end{cases}$.

Les couples solutions de l'équation **(E)** sont les couples de la forme $(10 + 7k,\ 15 + 11k)$ où *k* est un entier relatif.

1.d. Déterminons le nombre de points à coordonnées entières de la droite D situés dans $\mathcal{C}$:

Un point de D est à coordonnées entières si et seulement si ses coordonnées forment un couple solution de l'équation **(E)** c'est-à-dire si et seulement si ses coordonnées sont de la forme $(10 + 7k,\ 15 + 11k)$ où *k* est un entier relatif. Un tel point appartient à $\mathcal{C}$ lorsque ses coordonnées sont situées entre 0 et 50.

Nous sommes amenés à rechercher combien il y a d'entiers relatifs *k* vérifiant : $\begin{cases} 0 \le 10 + 7k \le 50 \\ 0 \le 15 + 11k \le 50 \end{cases}$, autrement dit vérifiant : $\begin{cases} -10 \le 7k \le 40 \\ -15 \le 11k \le 35 \end{cases}$.

Ce système d'inéquations conduit à : $\begin{cases} -\frac{10}{7} \le k \le \frac{40}{7} \\ -\frac{15}{11} \le k \le \frac{35}{11} \end{cases}$ soit, en définitive, à $-1 \le k \le 3$ vu que *k* est un entier relatif.

Cinq valeurs de l'entier *k* conviennent.

Il y a 5 points à coordonnées entières de la droite D situés dans $\mathcal{C}$

NB. Le domaine $\mathcal{C}$ ne contenant qu'un nombre fini de points à coordonnées entières, il est possible de résoudre l'équation **(E)** de la **question 1.d** dans le domaine $\mathcal{C}$ à l'aide d'un algorithme d'exploration systématique. Ci-dessous, un algorithme Python et son exécution. L'algorithme affiche les coordonnées des points convenables puis le nombre de ces points.

[1] **Pour mémoire, résolution de l'équation homogène $\boldsymbol{aX - bY = 0}$.** Soit (*X*, *Y*) un couple solution. L'entier *a* divise *bY* et est premier avec *b*, donc il divise *Y* (théorème de Gauss). Il existe un entier relatif *k* tel que $Y = ka$. De ce fait : $aX = b \times (ka)$ d'où on déduit, puisque *a* est non nul, $X = kb$. Le couple (X, Y) est nécessairement de la forme (ka, kb) où *k* est un entier relatif. Réciproquement, on vérifie sans peine qu'un couple de cette forme est solution de l'équation $aX - bY = 0$.

```
>>> def freem():
        n=0
        for x in range(0,51):
                for y in range(0,51):
                        if 11*x-7*y-5==0:
                                n=n+1
                                print(x,y)
        print(n)
```

```
>>> freem()
3 4
10 15
17 26
24 37
31 48
5
```

2. L'équation **(F)** est l'équation $11x^2 - 7y^2 = 5$ dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.a. Montrons que, si (x, y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \ (modulo\ 5)$:

Si (x, y) est solution de **(F)**, alors l'égalité $11x^2 - 7y^2 = 5$ est vérifiée. Cette égalité implique la relation de congruence modulo 5 : $11x^2 - 7y^2 \equiv 0 \ (modulo\ 5)$.

Or, 11 est congru à 1 modulo 5 et 7 est congru à 2 modulo 5.
La congruence $11x^2 - 7y^2 \equiv 0 \ (modulo\ 5)$ implique la congruence $x^2 - 2y^2 \equiv 0 \ (modulo\ 5)$, soit aussi bien : $x^2 \equiv 2y^2 \ (modulo\ 5)$.

Si (x, y) est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2 \ (modulo\ 5)$.

2.b. Recopions et complétons les deux tableaux :

Modulo 5, *x* est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à	0	1	4	4	1
Modulo 5, *y* est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Déduisons-en les valeurs possibles des restes des divisions par 5 de x^2 et de $2y^2$:

Dans les tableaux, nous avons écrit les nombres compris au sens large entre 0 et 4 auxquels étaient congrus modulo 5 les entiers x^2 et $2y^2$. Ce sont les restes de leur division euclidienne par 5. Nous pouvons conclure par simple lecture.

Les valeurs possibles des restes de la division euclidienne par 5 de x^2 sont 0, 1 ou 4.
Les valeurs possibles des restes de la division euclidienne par 5 de $2y^2$ sont 0, 2 ou 3.

2.c. Déduisons-en que, si (x, y) est solution de (F), alors x et y sont multiples de 5 :

Si (x, y) est solution de **(F)**, alors d'après la **question 2.a**, $x^2 \equiv 2y^2 \ (modulo\ 5)$. Si cette congruence est vérifiée, les restes des divisions euclidiennes par 5 de x^2 et de $2y^2$ sont égaux. Or, la lecture des tableaux nous apprend qu'il ne peut y avoir coïncidence de ces restes que si *x* et *y* sont tous deux congrus à 0 modulo 5, la seule valeur possible commune étant celle d'un reste égal à 0.

Si (x, y) est solution de **(F)**, alors *x* et *y* sont tous deux multiples de 5.

3.a. Montrons que, si x et y sont des multiples de 5, alors (x, y) n'est pas solution de (F) :

Si *x* et *y* sont tous deux multiples de 5, leurs carrés sont tous deux des multiples de 25, et le nombre $x^2 - 2y^2$, qui est une combinaison entière des deux carrés, est un entier relatif multiple de 25. Il existe toujours un entier relatif *m* tel que : $x^2 - 2y^2 = 25m$.

Or, l'entier 5 n'est pas un multiple de 25, il n'existe aucun entier *m* tel que $5 = 25m$.
La relation $x^2 - 2y^2 = 5$ ne peut être vérifiée par aucun couple d'entiers multiples de 5.

Si *x* et *y* sont des multiples de 5, nécessairement (x, y) n'est pas solution de **(F)**.

3.b. Concluons :

La **question 2.c** établit que l'ensemble des couples-solutions de **(F)** est inclus dans l'ensemble des couples de multiples de 5.
La **question 3.a** établit que l'ensemble des couples de multiples de 5 est inclus dans l'ensemble des couples d'entiers relatifs qui ne sont pas solution de **(F)**.
L'ensemble des couples-solutions de **(F)** est donc inclus dans son complémentaire. Nécessairement, c'est l'ensemble vide.

NB. Nous pouvons aussi conclure « par l'absurde ».
Supposons qu'il existe un couple solution de **(F)**. Ce couple est formé nécessairement de deux multiples de 5, donc ce couple n'est pas solution de **(F)**. Ce couple serait à la fois solution de **(F)** et non solution de **(F)**, ce qui est absurde.

L'équation **(F)** n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.