www.freemaths.fr

Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse

31

Correction

La transformation du plan S dont il est question dans cet exercice est une **similitude directe**. L'étude de ce type de transformations ne fait plus partie du programme des classes de Terminale. Toute la **partie A** est donc clairement hors-programme. Voici cependant pour les curieux quelques informations sur la notion de similitude directe.
On se place dans le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et assimilé au plan complexe.

Définition d'une similitude directe

Soit a un nombre complexe non nul et b un nombre complexe quelconque.
Ce couple $(a,\ b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ étant fixé, on définit l'application $S_{a,\,b}$ du plan complexe dans lui-même qui, à tout point d'affixe z, associe le point $M' = S_{a,b}(M)$ dont l'affixe z' est :

$$z' = az + b$$

Points invariants d'une similitude directe $S_{a,\,b}$

Un point M d'affixe z est invariant par $S_{a,\,b}$ si et seulement si $z = az + b$ c'est-à-dire si et seulement si $(1 - a)z = b$.

- Si $a = 1$; $b = 0$ alors tout point du plan est invariant, $S_{1,\,0}$ est l'application identique.
- Si $a = 1$; $b \neq 0$ alors aucun point du plan n'est invariant. Dans ce cas, pour tout point M du plan d'affixe z : $z' - z = b$ c'est-à-dire que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur fixe. La transformation $S_{1,\,b}$ est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$ alors $S_{a,\,b}$ possède un point invariant et un seul, le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. Ce point Ω est alors appelé le centre de la similitude directe $S_{a,\,b}$.

Caractéristiques géométriques d'une similitude directe $S_{a,\,b}$ lorsque $a \neq 1$

Dans ce cas, la relation $z' = az + b$ est équivalente à la relation $z' - \omega = a(z - \omega)$ où ω désigne l'affixe du centre de similitude. Nous laissons au lecteur le soin de le vérifier. On désigne par k le module de a (k est donc un réel strictement positif) et par θ un argument de a.

Pour tout point M du plan, distinct de Ω, d'affixe z et d'image M' d'affixe z' : $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = k.e^{i\theta}$

Or : $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = k.e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\Omega M'}{\Omega M} = k \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ \ (mod\ 2\pi) \end{cases}$

L'application $S_{a,\,b}$ est la composée, dans l'ordre que l'on veut, de l'homothétie de centre Ω et de rapport k avec la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ.
Le nombre k est appelé le rapport de la similitude directe $S_{a,\,b}$ et θ est appelé une mesure de l'angle de la similitude directe $S_{a,\,b}$.

Lorsque $a \neq 1$, une similitude directe $S_{a,\,b}$ est caractérisée géométriquement par trois paramètres : son centre Ω, son rapport k et son angle θ.

Partie A.

1. Déterminons la nature et les caractéristiques géométriques de la transformation *S* :

La transformation S est la transformation $\boldsymbol{S_{a,\,b}}$ avec $a = 5i$; $b = 4 + 6i$.
Il s'agit d'une similitude directe.

Son coefficient a est le nombre complexe de module 5 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- Son centre Ω a pour affixe : $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{4+6i}{1-5i} = -1 + i$. Il s'agit du point de coordonnées $(-1, 1)$.
- Son rapport est égal à 5, le module de a.
- Son angle a pour mesure $\frac{\pi}{2}$, un argument de a.

S est la composée, dans l'ordre que l'on veut, de l'homothétie de centre $\Omega\,(-1, 1)$ et de rapport 5 avec la rotation de même centre et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ (d'angle droit direct).

2. Exprimons les coordonnées *x'* et *y'* de *M'* en fonction de celles, *x* et *y*, de *M* :

Les coordonnées de M et M' étant les parties réelle et imaginaire des affixes de ces points, nous avons la relation :

$$x' + iy' = 5i \times (x + iy) + 4 + 6i$$

Isolons les parties réelle et imaginaire du second membre :

$$x' + iy' = (5ix - 5y) + 4 + 6i = (4 - 5y) + i(6 + 5x)$$

Par identification des parties réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x' = 4 - 5y \\ y' = 6 + 5x \end{cases}$$

Partie B.

NB. Dans cette partie, notons bien et soulignons une fois pour toutes que si les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs, en tant que cocktails (sommes et produits) d'entiers relatifs, les coordonnées x' et y' de son image M' par S sont aussi des entiers relatifs.

1.a. Résolvons dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $4a + 3b = 5$:

Les coefficients 4 et 3 sont des entiers premiers entre eux, nous pouvons appliquer la méthode générale de résolution de ce type d'équation.

Nous devons rechercher une solution particulière $(a_0,\ b_0)$. Ensuite, nous savons qu'un couple $(a,\ b)$ est solution si et seulement si le couple $(a - a_0, b - b_0)$ est solution de l'équation homogène associée $4X + 3Y = 0$, c'est-à-dire si et seulement si c'est un couple de la forme $(3k, -4k)$ où k est un entier relatif.
L'ensemble des solutions recherchées est l'ensemble des couples $(a_0 + 3k, b_0 - 4k)$ où k est un entier relatif.

- Une solution particulière $(a_0,\ b_0)$: le couple $(2, -1)$ est un couple-solution particulier de cette équation.
- Un couple (a, b) est solution de l'équation $4a + 3b = 5$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $\begin{cases} a - 2 = 3k \\ b + 1 = -4k \end{cases}$

L'ensemble des solutions de l'équation $4a + 3b = 5$ est l'ensemble des couples de la forme $(2 + 3k, -1 - 4k)$ où k est un entier relatif.

1.b. Déduisons-en l'ensemble des points *M* de (E) tels que $-3x' + 4y' = 37$:

Pour « déduire », cherchons à nous ramener à l'équation que nous venons de résoudre.

Soit $M(x, y)$ un point de (E) d'image $M'(x', y')$. Exprimons $-3x' + 4y'$ en fonction de *x* et de *y*.

Compte tenu du résultat de la **question A.2** :

$$-3x' + 4y' = -3(4 - 5y) + 4(6 + 5x) = 12 + 20x + 15y$$

Par conséquent, $-3x' + 4y' = 37$ si et seulement si $12 + 20x + 15y = 37$, autrement-dit si et seulement si : $4x + 3y = 5$.

Bingo ! Nous retrouvons bien l'équation de la **question 1.a** …

La **question 1.a** a établi que, dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $4x + 3y = 5$ si et seulement s'il existe un entier relatif *k* vérifiant la relation $\begin{cases} x = 2 + 3k \\ y = -1 - 4k \end{cases}$.

Il nous reste à déterminer quels sont, parmi ces couples candidats, ceux qui sont des coordonnées d'éléments de (E).

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que l'entier relatif *k* vérifie $\begin{cases} -3 \leq 2 + 3k \leq 5 \\ -3 \leq -1 - 4k \leq 5 \end{cases}$

soit : $\begin{cases} -\frac{5}{3} \leq k \leq 1 \\ \frac{1}{2} \geq k \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$

.

Ce qui revient à dire que *k* ne peut prendre que l'une ou l'autre des deux valeurs 0 ou -1.

L'ensemble des points *M* de (E) tels que $-3x' + 4y' = 37$ est constitué de deux points : le point de coordonnées $(2, -1)$ et le point de coordonnées $(-1, 3)$.

2. Soit $M(x, y)$ un point de (E) d'image $M'(x', y')$ par S.

2.a. Montrons que $x' + y'$ est un multiple de 5 :

$x' + y' = (4 - 5y) + (6 + 5x) = 10 + 5x - 5y = 5 \times (2 + x - y)$.

Le nombre $m = 2 + x - y$ est un cocktail (sommes et différences) de nombres entiers relatifs, c'est lui-même un entier relatif.
Il existe bien un entier relatif m tel que $x' + y' = 5m$.

Le nombre $x' + y'$ est un multiple de 5.

2.b. Montrons que $x' + y'$ et $x' - y'$ sont congrus modulo 2 :

$(x' + y') - (x' - y') = 2y'$. Leur différence étant multiple de 2 :

$x' + y'$ et $x' - y'$ sont congrus modulo 2.

NB. En termes plus ordinaires, $x' + y'$ et $x' - y'$ ont la même parité. Il s'agit d'une propriété générale des entiers et non une propriété spécifique à x' et y' : la somme et la différence de deux entiers relatifs ont toujours la même parité, ou bien elles sont toutes deux paires, ou bien elles sont toutes deux impaires.

2.c. Montrons que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2, alors $x' + y'$ et $x' - y'$ sont des multiples de 2 :

$x'^2 - y'^2$ est égal au produit $(x' + y') \times (x' - y')$.
Considérons les deux nombres $x' + y'$ et $x' - y'$. Puisqu'ils ont la même parité, deux cas et deux seulement se présentent :

- Ou bien ils sont tous deux pairs.
- Ou bien ils sont tous deux impairs et alors leur produit est impair.

Par contraposition, si le produit $(x' + y') \times (x' - y')$ n'est pas impair (donc pair), alors les deux nombres $x' + y'$ et $x' - y'$ ne sont pas tous deux impairs (donc sont tous deux pairs).

Si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2, alors $x' + y'$ et $x' - y'$ sont des multiples de 2.

2.d. Déterminons l'ensemble des points de (E) tels que $x'^2 - y'^2 = 20$:

$x'^2 - y'^2 = (x' + y') \times (x' - y')$.
Or $x' + y' = 5 \times (2 + x - y)$ et $x' - y' = -2 - 5x - 5y$.
Donc : $x'^2 - y'^2 = 5 \times (2 + x - y) \times (-2 - 5x - 5y)$.

On obtient que $x'^2 - y'^2 = 20$ si et seulement si $(2 + x - y) \times (-2 - 5x - 5y) = 4$.

D 'après la **question 2.c**, les deux nombres $2 + x - y$ et $-2 - 5x - 5y$ ont la même parité.
Or, les entiers relatifs diviseurs complémentaires de 4 qui ont la même parité sont ou bien 2 (deux fois) ou bien -2 (deux fois).

Deux possibilités se présentent :

- $\begin{cases} 2+x-y=2 \\ -2-5x-5y=2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x-y=0 \\ 5x+5y=-4 \end{cases}$, système qui n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres entiers.

- $\begin{cases} 2+x-y=-2 \\ -2-5x-5y=-2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=0 \end{cases}$, système qui a pour solution $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$.

On vérifie que les coordonnées $(-2,\ 2)$ sont bien celles d'un point de (E).

L'ensemble des points *M* de (E) tels que $x'^2 - y'^2 = 20$ est constitué d'un unique point : le point de coordonnées $(-2,\ 2)$.

NB. L'ensemble (E) étant un ensemble fini de points, les ensembles recherchés en **question 1.c** et en **question 2.d** peuvent être obtenus en parcourant systématiquement, à l'aide d'un algorithme, l'ensemble (E) et en distinguant les cas où les équations correspondantes étaient satisfaites.

<table>
<tr>
<td>Recherche systématique, à l'aide d'un algorithme Python, des coordonnées des points de l'ensemble (E) qui satisfont les conditions de la question 1.c.

Nous obtenons les mêmes deux points que nous avons trouvés en 1.c.</td>
<td><pre>>>> def freem():
        for x in range(-3,6):
                for y in range(-3,6):
                        u=4-5*y
                        v=6+5*x
                        if 4*v-3*u==37:
                                print(x,y)

>>> freem()
-1 3
2 -1</pre></td>
</tr>
<tr>
<td>Recherche systématique, à l'aide d'un algorithme Python, des coordonnées des points de l'ensemble (E) qui satisfont les conditions de la question 2.d.

Nous obtenons le même unique point que nous avons trouvé en 2.d.</td>
<td><pre>>>> def freema():
        for x in range(-3,6):
                for y in range(-3,6):
                        u=4-5*y
                        v=6+5*x
                        if u*u-v*v==20:
                                print(x,y)

>>> freema()
-2 2</pre></td>
</tr>
</table>