

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Arithmétique



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# ARITHMÉTIQUE

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

## Partie A :

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Sans justifier, donner deux nombres premiers  $x$  et  $y$  tels que  $40 = x + y$ .
2. On considère l'équation  $20x + 19y = 40$ , où  $x$  et  $y$  désignent deux entiers relatifs. Résoudre cette équation.
3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque  $40 = 2^2 + 6^2$ . On veut savoir si 40 est aussi différence de deux carrés, autrement dit on s'intéresse à l'équation  $x^2 - y^2 = 40$ , où  $x$  et  $y$  désignent deux entiers naturels.
  - a) Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.
  - b) Montrer que, si  $x$  et  $y$  désignent des entiers naturels, les nombres  $x - y$  et  $x + y$  ont la même parité.
  - c) Déterminer toutes les solutions de l'équation  $x^2 - y^2 = 40$ , où  $x$  et  $y$  désignent deux entiers naturels.

## Partie B : « sommes » de cubes

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels.

Par exemple :

$$13 = 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3$$

$$13 = -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3$$

$$13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « somme de cubes » à la place de « somme ou différence de cubes d'entiers naturels ».

Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes.

Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1.
  - a) En utilisant l'égalité  $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$ , donner une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes.
  - b) On admet que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$$

En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en 1.a).

2. Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes :  $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$ .

On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme » de 3 cubes.

a) Recopier et compléter sans justifier :

Reste de la division euclidienne de $n$ par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de $n^3$ par 9					1				

b) On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel  $n$ , l'entier naturel  $n^3$  est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à  $-1$ .

Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.