Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse 29

Correction

Partie A.

1.Vérifions que le programme de calcul associe bien le nombre 308 à la date du 1 août :

Si la date d'anniversaire est le 1 août, le jour de naissance est égal à 1 et le mois de naissance est égal à 8. Le programme **(A)** calcule le nombre $12 \times 1 + 37 \times 8 = 12 + 296 = 308$.

Le programme **(A)** associe bien le nombre 308 à la date du 1 août.

2.a. Exprimons le nombre *z* en fonction de *j* et de *m* :

Supposons que l'anniversaire tombe le jour *j* du mois *m*. Le programme **(A)** affiche le nombre : $12 \times j + 37 \times m$.

Ainsi, $z = 12j + 37m$

Montrons que z et m sont congrus modulo 12 :

Compte tenu de l'expression de *z* en fonction de *j* et de *m*, les nombres *z* et 37*m* diffèrent d'un multiple de 12, ils sont congrus modulo 12. La relation $37 = 3 \times 12 + 1$ montre quant à elle que $37 \equiv 1 \ (modulo\ 12)$, par conséquent $37m \equiv m \ (modulo\ 12)$.

Par transitivité de la relation de congruence modulo 12 : $z \equiv m \ (modulo\ 12)$.

NB. Le nombre *m* est l'unique entier vérifiant $1 \leq m \leq 12$ qui est congru à *z* modulo 12. Ce nombre *m* est généralement le reste de la division euclidienne de *z* par 12, sauf lorsque *z* est multiple de 12, auquel cas le reste de la division euclidienne est nul tandis que $m = 12$ (cas où le mois d'anniversaire est le mois de décembre).

2.b. Retrouvons la date d'anniversaire associée à $z = 474$:

Retrouvons d'abord le mois *m* d'anniversaire.
Pour cela, nous nous aidons de la division euclidienne : $474 = 39 \times 12 + 6$.
Le reste de cette division euclidienne est égal à 6, par conséquent $474 \equiv 6 \ (modulo\ 12)$.

Compte tenu du **NB 2.a** portant sur la valeur de m, nous pouvons affirmer que $m = 6$.

Retrouvons le jour d'anniversaire :
Le programme **(A)** a calculé : $z = 12j + 37 \times 6$, de sorte que *j* vérifie l'équation : $474 = 12j + 222$, soit l'équation $12j = 252$. Nous en déduisons $j = \frac{252}{12} = 21$.

La date d'anniversaire associée au nombre 474 est le 21 juin.

Partie B.

1. Première méthode, un algorithme :

Il s'agit d'ajouter une instruction conditionnelle à l'algorithme.

Nous prenons le parti d'écrire un algorithme Python conforme aux exigences de l'énoncé.

```
>>> def magicien():
        for m in range(1,13):
            for j in range(1,32):
                z=12*j+31*m
                if z==503:
                    print(m,j)

>>> magicien()
5 29
```

2. Deuxième méthode :

2.a. Montrons que *z* et 7*m* ont le même reste dans la division euclidienne par 12 :

Soit *n* un entier strictement positif. On sait que deux entiers *a* et *b* ont le même reste dans la division euclidienne par *n* si et seulement s'ils sont congrus modulo *n*. Nous allons utiliser ici une congruence modulo 12 pour démontrer la concordance des restes.

Compte tenu de l'expression de *z* en fonction de *j* et de *m*, les nombres *z* et 31*m* diffèrent d'un multiple de 12, ils sont congrus modulo 12. La relation $31 = 2 \times 12 + 7$ montre quant à elle que 31 est congru à 7 modulo 12, par conséquent $31m \equiv 7m \ \ (modulo\ 12)$.

Par transitivité de la relation de congruence modulo 12 : $z \equiv 7m \ \ (modulo\ 12)$.

Les entiers *z* et 7*m* sont congrus modulo 12, ils ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

2.b. Etudions les restes de la division euclidienne de 7*m* par 12, pour *m* allant de 1 à 12 :

Un algorithme Python affiche les entiers m de 1 à 12 accompagnés du reste de la division euclidienne de 7m par 12.	`>>> def restesseptm():`
	`    for m in range(1,13):`
	`        print(m,7*m%12)`
		`>>> restesseptm()`
		1 7
		2 2
		3 9
		4 4
		5 11
		6 6
		7 1
		8 8
		9 3
		10 10
		11 5
		12 0

2.c. Déduisons-en la date d'anniversaire associée à *z* = 503 avec le programme (B) :

La division euclidienne de 503 par 12 s'écrit : $503 = 41 \times 12 + 11$. Le reste de cette division étant égal à 11, ce reste est aussi celui de la division euclidienne de $7m$ par 12.

Nous lisons dans les listes conjointes des valeurs de *m* et des restes des divisions de $7m$ par 12 que l'on obtient le reste 11 lorsque *m* est égal à 5.

Retrouvons le jour d'anniversaire :
Le programme (**B)** a calculé : $z = 12j + 31 \times 5$, de sorte que *j* vérifie l'équation : $503 = 12j + 155$, soit l'équation $12j = 348$.

Nous en déduisons $j = \frac{348}{12} = 29$.

La date d'anniversaire associée au nombre 503 est le 29 mai.

3. Troisième méthode :

NB. Nous noterons (E) l'équation $12x + 31y = 503$ dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

L'énoncé découpe la résolution de cette équation en quatre étapes, de **3.a** à **3.d**. Ce saucissonnage façon chiffonnade nous invite à détailler, sur cet exemple, une méthode générale de résolution de l'équation $ax + by = c$ où *a* et *b* sont des entiers premiers entre eux.

3.a. Vérifions que le couple $(-2\ ;\ 17)$ est solution de l'équation (E) :

$12 \times (-2) + 31 \times 17 = -24 + 527 = 503$

Le couple $(-2\ ;\ 17)$ est bien solution de l'équation (E).

NB. Nous disposons désormais d'un couple solution particulier de (E).

3.b. Déduisons-en que, si $(x,\ y)$ est solution de (E), alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$:

Soit $(x,\ y)$ un couple d'entiers relatifs solution de (E).

Confrontons l'équation $12x + 31y = 503$ vérifiée par ce couple avec la décomposition de 503 résultant de l'usage de la solution particulière $(-2\ ;\ 17)$: $\begin{cases} 12x + 31y = 503 \\ 12 \times (-2) + 31 \times 17 = 503 \end{cases}$

Par transitivité de la relation d'égalité : $12x + 31y = 12 \times (-2) + 31 \times 17$.
Cette relation entre *x* et *y* est équivalente à la relation $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

Si $(x,\ y)$ est solution de (E), alors $12(x + 2) = 31(17 - y)$.

NB. Notons que, dans cette relation, les entiers 12 et 31 sont des entiers premiers entre eux. En effet, nous pouvons remarquer que 31 est un nombre premier, il est premier avec tout entier qu'il ne divise pas, en particulier avec 12.

3.c. Déterminons l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs (*x, y*) solutions de l'équation (E) :

NB. Soit *a, b, c* trois entiers non nuls. Le théorème de Gauss nous dit que, si *a* divise le produit *bc* et s'il est premier avec *b*, alors il divise *c*. Nous allons devoir l'appliquer.

Soit $(x,\ y)$ un couple solution de (E). Alors, d'après la question 3.b, ce couple vérifie la relation :

$$12(x+2) = 31(17-y)$$

.

31 divise le second membre de cette égalité, donc il divise le premier.

L'entier 31 divise le produit $12(x+2)$ et est premier avec 12. D'après le théorème de Gauss, 31 divise $(x+2)$.

Il existe donc un entier relatif *k* tel que : $x + 2 = 31k$

La relation $12(x+2) = 31(17-y)$ peut s'écrire désormais $12 \times (31k) = 31(12-y)$ d'où on déduit que :

$$12k = 17 - y$$

Nous obtenons des expressions de *x* et de *y* en fonction du paramètre *k* : $\begin{cases} x+2 = 31k \\ 17-y = 12k \end{cases}$.

Si un couple d'entiers relatifs $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)**, alors il existe un entier relatif *k* tel que : $\begin{cases} x = -2+31k \\ y = 17-12k \end{cases}$.

Réciproquement, supposons que $\begin{cases} x = -2+31k \\ y = 17-12k \end{cases}$, où *k* est un entier relatif.

Alors $12x + 31y = 12(-2+31k) + 31(17-12k) = 503$, le couple d'entiers relatifs $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)**.

NB. Dans la question 3.b, nous avons démontré une implication directe (si (*x, y*) est solution, alors …). Nous sommes tenus de vérifier la réciproque pour justifier que nous avons, exactement, tous les couples solutions et seulement eux.

Les couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ qui vérifient l'équation $12x + 31y = 503$ sont les couples de la forme $(-2+31k,\ 17-12k)$ où *k* est un entier relatif.

3.d. Montrons l'unicité du couple dans lequel $1 \leq y \leq 12$:

NB. Il faut lire, bien entendu, « Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs (*x, y*) vérifiant l'équation $12x + 31y = 503$ tel que … »

Soit (*x, y*) un tel couple, de la forme $(x = -2 + 31k,\ y = 17 - 12k)$ où k est un entier relatif. La relation $1 \leq y \leq 12$ est vérifiée si et seulement si $1 \leq 17 - 12k \leq 12$, c'est-à-dire si et seulement si $5 \leq 12k \leq 16$ ou, de façon équivalente, $\frac{5}{12} \leq k \leq \frac{4}{3}$.

Il existe un et un seul entier relatif situé entre $\frac{5}{12}$ et $\frac{4}{3}$, c'est l'entier $k = 1$, auquel on associe le couple (29, 5).

Il existe un unique couple d'entiers relatifs (x, y) solution de l'équation $12x + 31y = 503$ et tel que $1 \leq y \leq 12$, c'est le couple (29, 5).

3.e. Concluons :

x désigne le jour et *y* le mois d'anniversaire et $12x + 31y$ est le programme de calcul (B). De même que dans les deux autres méthodes, lorsque ce programme affiche 503 :

Nous retrouvons le 29 mai comme date d'anniversaire.