Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse 26

Correction

NB. Nous relevons dans le texte de l'énoncé une ambigüité dans la définition d'un nombre triangulaire, due à la notation utilisée dans l'énoncé $1+2+\cdots+n$ pour représenter le nombre triangulaire T_n de rang n. Cette ambiguïté a une incidence dans la résolution de la **question A.2**.
Selon l'acceptation la plus répandue, le nombre triangulaire T_n de rang n est la somme des n premiers entiers <u>strictement positifs</u>. Ainsi, $T_1 = 1$; $T_2 = 1+2 = 3$; $T_3 = 1+2+3 = 6$; … Nous conviendrons que la notation de l'énoncé « $1+2+\cdots+n$ » représente le nombre triangulaire T_n pour tout entier n strictement positif.

Partie A. Nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Vérifions que 36 est à la fois un nombre triangulaire et le carré d'un nombre entier :

- $36 = \frac{8\times 9}{2} = 1+2+3+4+5+6+7+8$. Le nombre 36 est triangulaire.
- 36 est le carré de 6.

36 est à la fois un nombre triangulaire et le carré d'un nombre entier.

2.a. Montrons qu'une somme $1+2+\cdots+n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier <u>strictement positif</u> p tel que $n^2+n-2p^2=0$:

Soit n un entier strictement positif. La somme $1+2+\cdots+n$ des n premiers entiers strictement positifs est égale, selon le rappel évoqué par l'énoncé, au nombre $\frac{n\times(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.

Supposons que la somme $1+2+\cdots+n$ soit le carré d'un certain entier p. Alors : $\frac{n^2+n}{2} = p^2$ soit aussi bien : $n^2+n = 2p^2$. Il existe un entier naturel p tel que $n^2+n-2p^2=0$.

Supposons réciproquement que n soit un entier tel qu'il existe un entier naturel p vérifiant la relation $n^2+n-2p^2=0$.

- Si $p=0$, alors $n=0$, valeur de n qui n'est associée à aucune somme de n premiers entiers.
- Si p est strictement positif, alors n aussi et $p^2 = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n\times(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n$, la somme des n premiers entiers est égale au carré de p.

Nous pouvons énoncer :

La somme $1+2+\cdots+n$ des n premiers entiers $(n>0)$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier <u>strictement positif</u> p tel que $n^2+n-2p^2=0$.

2.b. Montrons l'équivalence des relations $n^2 + n - 2p^2 = 0$ et $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$:

Développons le carré $(2n+1)^2$. Ce développement est le suivant : $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.
En conséquence, $(2n+1)^2 - 8p^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 8p^2 - 1 = 4(n^2 + n - 2p^2)$.

En conséquence, $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$ si et seulement si $4(n^2 + n - 2p^2) = 0$ ou aussi bien si et seulement si $n^2 + n - 2p^2 = 0$. En raison de notre conclusion de la **question 2.a**, nous énoncerons :

La somme $1 + 2 + \cdots + n$ des *n* premiers entiers $(n > 0)$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier <u>strictement positif</u> *p* tel que $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

NB. Comme dans la question précédente, le cas $p = 0$ impliquerait $n = 0$ et doit être exclu, vu que « la somme des 0 premiers carrés », selon notre convention, n'a aucun sens.

Partie B. Etude de l'équation diophantienne associée

1. Donnons deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de l'équation (E) :

L'équation (E) est l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$.

- Le couple $(1\,;\,0)$ est solution de (E) car $1^2 - 8 \times 0^2 = 1$
- Le couple $(3\,;\,1)$ est solution de (E) car $3^2 - 8 \times 1^2 = 1$

2. Démontrons que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs *x* et *y* sont premiers entre eux :

Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers relatifs solution de (E).

Ces entiers vérifient la relation $x^2 - 8y^2 = 1$. Cette relation a l'aspect d'une relation de Bézout.

Nous allons montrer qu'il existe deux entiers relatifs *u* et *v* vérifiant la relation $u\,x + v\,y = 1$, l'existence de tels entiers caractérisant le fait que *x* et *y* sont des entiers premiers entre eux.

Nous pouvons en effet écrire cette relation ainsi : $x \times x + (-8y) \times y = 1$

En posant $u = x$, $v = -8y$, nous obtenons bien la relation souhaitée : $u \times x + v \times y = 1$.

Si $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs solution de (E), alors il existe deux entiers *u* et *v* qui satisfont à l'égard de *x* et *y* la relation de Bézout. Le couple $u = x$, $v = -8y$ en est un exemple.

D'après le théorème de Bézout, les entiers relatifs *x* et *y* sont premiers entre eux.

Partie C. Lien avec le calcul matriciel

Les entiers x' et y' sont définis par la relation matricielle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1. Exprimons x' et y' en fonction de x et *y* :

Pour cela effectuons explicitement le produit matriciel indiqué : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 8y \\ x + 3y \end{pmatrix}$.

On sait que deux matrices sont égales si elles ont le même format et si leurs termes homologues sont égaux.

Par identification des termes des deux matrices-colonnes : $\begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

2. Déterminons la matrice A^{-1} inverse de *A* :

Nous savons que, dans le cas d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à deux lignes et deux colonnes dont le déterminant est non nul, nous obtenons sa matrice inverse « en permutant les termes de la diagonale principale et en changeant le signe des deux autres, puis en divisant la matrice obtenue par le déterminant de *A* ».

Autrement dit, la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

En l'occurrence, la matrice *A* est la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Elle a pour déterminant le nombre $\det(A) = 3 \times 3 - 1 \times 8 = 1$, cette matrice est donc inversible puisque son déterminant, égal à 1, est non nul. En outre $\frac{1}{\det(A)} = 1$. Appliquons la formule d'inversion.

La matrice inverse de *A* est la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exprimons maintenant *x* et *y* en fonction de *x'* et *y'* :

Considérons la relation matricielle $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et multiplions-la à gauche par l'inverse de la matrice *A*. Cette relation matricielle est équivalente à la relation : $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soit à la relation : $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

En effectuant le produit matriciel, nous obtenons : $\begin{pmatrix} 3x' - 8y' \\ -x' + 3y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Par identification des termes des deux matrices colonnes : $\begin{cases} x = 3x' - 8y' \\ y = -x' + 3y' \end{cases}$.

3. Montrons que $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\,;y')$ est solution de (E) :

Supposons que le couple $(x\,;y)$ soit solution de (E). Alors *x* et *y* vérifient la relation $x^2 - 8y^2 = 1$.

Dans cette relation, substituons à *x* et à *y* leurs expressions en fonction de *x'* et *y'* obtenues à la **question 2** : $(3x' - 8y')^2 - 8(-x' + 3y')^2 = 1$.

Développons les deux carrés : $(9x'^2 - 48x'y' + 64y'^2) - 8\left(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2\right) = 1$

Nous obtenons : $x'^2 - 8y'^2 = 1$. Le couple $(x'; y')$ est solution de (E).

Si le couple $(x\,;y)$ est solution de (E), alors le couple $(x'; y')$ est aussi solution de (E).

Supposons réciproquement que le couple $(x'\,;y')$ soit solution de (E). Alors *x'* et *y'* vérifient la relation $x'^2 - 8y'^2 = 1$.

Dans cette relation, substituons à *x'* et à *y'* leurs expressions en fonction de *x* et *y* obtenues à la **question 1** : $(3x + 8y)^2 - 8(x + 3y)^2 = 1$.

Développons les deux carrés : $(9x^2 + 48xy + 64y^2) - 8(x^2 + 6xy + 9y^2) = 1$

Nous obtenons : $x^2 - 8y^2 = 1$. Le couple $(x\,;y)$ est solution de (E).

Si le couple $(x';\ y')$ est solution de (E), alors le couple $(x\,;y)$ est aussi solution de (E).

Synthèse des deux démonstrations, directe et réciproque :

$(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'; y')$ est solution de (E).

4. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel *n*, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E) :

Soit P_n la propriété liée à l'entier *n* : « le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E) ».

Initialisation : Le couple $(x_0\,;\ y_0)$ est le couple (3, 1) qui a été cité explicitement comme exemple de couple solution de (E) à la **question B.1**. La propriété P_0 est vérifiée.

Hérédité : Supposons P_n vérifiée pour un certain entier naturel *n*, c'est-à-dire supposons que le couple $(x_n\,;y_n)$ soit solution de (E). Son couple successeur est le couple $(x_{n+1}\,;y_{n+1})$ défini par $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Or, nous avons montré dans la **question C.3** que, si un couple $(x\,;y)$ est solution de (E), alors le couple $(x'; y')$ défini par l'égalité $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est lui aussi solution de (E). Par conséquent, si nous supposons que $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E), alors il en est de même du couple $(x_{n+1}\,;y_{n+1})$.
La propriété P_n implique la propriété P_{n+1}, elle est héréditaire.

Etant héréditaire et vérifiée pour l'entier 0, cette propriété P_n est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n*, le couple $(x_n\,;y_n)$ est solution de (E).

Partie D. Retour au problème initial

Dans cette partie, nous devons rechercher un entier *n* vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Le nombre $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$ est plus grand que 2015.
- Il existe un entier *p* tel que le couple $(2n + 1\ ; p)$ soit solution de (E).

Cherchons d'abord à partir de quel entier *n* l'inégalité $\frac{n \times (n+1)}{2} \geq 2015$ est vérifiée.

Une calculatrice nous indique que $63 < \sqrt{4030} < 64$ de sorte que nous avons les inégalités suivantes : $\frac{62 \times 63}{2} = 1953 < 2015 < \frac{63 \times 64}{2} = 2016$.

L'entier *n* est au moins égal à 63 et, de ce fait, l'entier $2n + 1$ est au moins égal à 127.

Les suites étudiées à la partie C forment des couples solutions de (E) dans lesquels x_n est un nombre triangulaire. Nous devons en trouver un tel que $x_n \geq 127$. Allons-y vaillamment ...

Successivement, à partir de $(x_0\ ;\ y_0) = (3\ ;\ 1)$ nous construisons :

- $(x_1\ ;\ y_1) = (3x_0 + 8y_0\ ;\ x_0 + 3y_0) = (17\ ; 6)$
- $(x_2\ ;\ y_2) = (3x_1 + 8y_1\ ;\ x_1 + 3y_1) = (99\ ; 35)$
- $(x_3\ ;\ y_3) = (3x_2 + 8y_2\ ;\ x_2 + 3y_2) = (577\ ; 204)$, le seuil 127 est franchi.

Ce qui nous conduit à l'entier $n = \frac{577 - 1}{2} = 288$.

Un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est un carré est le nombre 41616. C'est la somme des 288 premiers entiers et c'est le carré de 204 : $41616 = 204^2 = \frac{288 \times 289}{2} = 1 + 2 + \cdots + 288$.

NB. Une recherche systématique à l'aide d'un algorithme prouverait que le nombre triangulaire d'indice 288 est le plus petit nombre triangulaire qui est plus grand que 2015 et qui est aussi un carré, chose que notre résolution ne prouve pas (le but du problème est de déterminer « des » nombres triangulaires carrés d'entiers mais non de montrer que nous les trouvons tous).

Ci-contre, l'algorithme « tricarre » a été rédigé avec TI-Nspire CAS. Il est muni d'un test d'arrêt provoquant l'affichage du premier nombre triangulaire plus grand que 2015 qui est un carré.