Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 26

ÉNONCÉ

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que: $N = 1 + 2 + ... + n$.

Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a: $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Partie A: nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.

2. a. Montrer que le nombre $1 + 2 + ... + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que: $n^2 + n - 2p^2 = 0$.

b. En déduire que le nombre $1 + 2 + ... + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que: $(2n + 1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B: étude de l'équation diophantienne associée

On considère l'équation (E) diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$, où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de **(E)**.

2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls (x, y) est solution de **(E)**, alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C: lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs et $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.

3. Démontrer que (x, y) est solution de **(E)** si et seulement si (x', y') est solution de **(E)**.

4. On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n: $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple (x_n, y_n) est solution de **(E)**.

Partie D: retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2015 qui est le carré d'un entier.