Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 24

ÉNONCÉ

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x:

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans la suite de l'exercice, on considère un nombre entier $a \geqslant 2$.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n: $n = dk$.

Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soit m et n deux entiers naturels non nuls et d leur **pgcd**.

a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de **Bézout** à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que: $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que:

$$(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)\,a^d = a^d - 1.$$

c. Montrer que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

d. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.