Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse

23

Correction

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes

1.a. Déterminons les solutions de l'équation $8x - 5y = 3$ (E) :

La méthode générale de résolution d'une équation de la forme $ax - by = c$ **(E)** où *a* et *b* sont des entiers premiers entre eux et *c* un entier relatif non nul est la suivante :

- On cherche un couple solution $(x_0,\ y_0)$ particulier de l'équation **(E)**.
- Un couple $(x,\ y)$ est solution de **(E)** si et seulement si le couple $(x - x_0,\ y - y_0)$ est solution de l'équation $aX - bY = 0$ **(H)**, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(kb,\ ka)$ où *k* est un entier relatif.
- Les couples solutions de **(E)** sont les couples de la forme : $(x_0 + kb,\ y_0 + ka)$ où *k* est un entier relatif.

En l'occurrence, nous voyons de façon évidente que le couple $(1,\ 1)$ est une solution de l'équation $8x - 5y = 3$ **(E)** car : $8 \times 1 - 5 \times 1 = 8 - 5 = 3$.

Un couple $(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement si le couple $(X = x - 1,\ Y = y - 1)$ est solution de l'équation $8X - 5Y = 0$, équation qui a pour solutions les couples de la forme $(5k,\ 8k)$ où *k* est un entier relatif.

$(x,\ y)$ est solution de l'équation **(E)** si et seulement si il existe un entier relatif *k* tel que $\begin{cases} x - 1 = 5k \\ y - 1 = 7k \end{cases}$

Les couples solutions de l'équation **(E)** sont les couples de la forme $(1 + 5k,\ \ 1 + 8k)$ où *k* est un entier relatif.

1.b. Montrons que si *m* est un entier tel qu'il existe un couple (p, q) d'entiers vérifiant $\begin{cases} m = 8p + 1 \\ m = 5q + 4 \end{cases}$ alors le couple (p, q) est solution de l'équation (E) :

L'équation (E) est équivalente à l'équation $8x - 5y - 3 = 0$

Soit *m* un entier tel qu'il existe un couple (p, q) d'entiers vérifiant $\begin{cases} m = 8p + 1 \\ m = 5q + 4 \end{cases}$.

Alors les entiers *p* et *q* vérifient l'équation : $8p + 1 = 5q + 4$.

Or : $(8p + 1) - (5q + 4) = 8p - 5q - 3$.

Dire que les entiers p et q vérifient la relation $8p + 1 = 5q + 4$, revient à dire qu'ils vérifient la relation $8p - 5q - 3 = 0$, c'est-à-dire que le couple $(p,\ q)$ est solution de l'équation **(E)**.

Si m est un entier tel qu'il existe un couple (p, q) d'entiers vérifiant $\begin{cases} m = 8p + 1 \\ m = 5q + 4 \end{cases}$ alors le couple (p, q) est solution de l'équation **(E)**

Déduisons-en qu'alors $m \equiv 9\ \ (modulo\ 40)$:

D'après la **question 1.a**, les solutions de (E) sont les couples de la forme $(1 + 5k,\ \ 1 + 8k)$ où k est un entier relatif.

Nous pouvons exprimer m en fonction de ce paramètre k par l'une ou l'autre au choix des deux expressions de m.

En utilisant l 'expression $m = 8p + 1$, nous obtenons comme expression de m en fonction de k :

$$m = 8p + 1 = 8(1 + 5k) + 1 = 40k + 9$$

NB. Aussi bien : $m = 5q + 4 = 5(1 + 8k) + 4 = 40k + 9$

Le nombre $m - 9$ est un multiple de 40, ce qui se traduit en termes de congruences par :

$$m \equiv 9\ \ (modulo\ 40)$$

Etudions la réciproque. Supposons que m soit un entier congru à 9 modulo 40.

D'après la définition de la congruence modulo 40, il existe un entier relatif k tel que : $m = 9 + 40k$.

Mais alors, m peut s'exprimer ainsi : $m = 1 + 8 + 40k = 8 \times (1 + 5k) + 1$
Et aussi bien il peut s'exprimer ainsi : $m = 4 + 5 + 40k = 5 \times (1 + 8k) + 4$

Si nous posons $p = 1 + 5k$ et $q = 1 + 8k$, alors m s'exprime des deux façons : $\begin{cases} m = 8p + 1 \\ m = 5q + 4 \end{cases}$, ce qui démontre la réciproque.

Nous pouvons conclure :

m est un entier tel qu'il existe un couple (p, q) d'entiers vérifiant $\begin{cases} m = 8p + 1 \\ m = 5q + 4 \end{cases}$ si et seulement si m est un entier congru à 9 modulo 40

1.c. Déterminons le plus petit de ces nombres entiers supérieurs à 2000 :

L'entier 2000 est un multiple de 40. En effet, $2000 = 40 \times 50$.
Le plus petit nombre qui soit supérieur à 2000 et congru à 9 modulo 40 est donc le nombre 2009 qui est égal à $40 \times 50 + 9$.

La réponse est l'entier 2009

NB. La question 1.b ne nous impose pas, à aucun moment, d'étudier une réciproque. Cependant, la question 1.c nous demande de déterminer « le plus petit des nombres *m* plus grand que 2000 ». Pour pouvoir affirmer que 2009 est bien ce plus petit nombre, nous devons être certains qu'il vérifie les conditions imposées. L'étude réciproque nous dispense de vérifier, la réponse est oui.

À défaut d'étude réciproque, nous aurions *vérifié* : $2009 = 8 \times 251 + 1 = 5 \times 401 + 4$, le couple $(p, q) = (251, 401)$ lui est associé, c'est bien « un nombre *m* ».

2. On remarque dans cette question l'introduction d'une notation (l'entier naturel *n*) qui n'est pas utilisée ensuite.

Détournons-la à notre profit pour rappeler que la relation de congruence modulo *n* (où *n* désigne un entier strictement positif) est compatible avec l'exponentiation.
En d'autres termes, si *a* et *b* sont deux entiers congrus modulo *n*, alors pour tout entier naturel *k* leurs puissances *k-ièmes* sont elles aussi congrues modulo *n*. La congruence $a \equiv b \ (modulo\ n)$ implique pour tout entier naturel *k* la congruence $a^k \equiv b^k \ (modulo\ n)$

2.a. Montrons que pour tout entier naturel k on a $2^{3k} \equiv 1 \ (modulo\ 7)$:

On note que $2^3 = 8 = 7 + 1$, c'est-à-dire que $2^3 \equiv 1 \ (modulo\ 7)$

D'après la compatibilité avec l'exponentiation de la relation de congruence modulo 7, la congruence $2^3 \equiv 1 \ (modulo\ 7)$ implique pour tout entier naturel *k* la congruence $(2^3)^k \equiv 1^k \ (modulo\ 7)$

Or pour tout entier naturel *k* : $(2^3)^k = 2^{3k}$ et $1^k = 1$

Il est vrai que pour tout entier naturel *k* on a $2^{3k} \equiv 1 \ (modulo\ 7)$

2.b. Déterminons le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7 :

Le multiple de 3 immédiatement inférieur à 2009 est l'entier $2007 = 3 \times 669$ et la division euclidienne de 2009 par 3 s'écrit ainsi : $2009 = 3 \times 669 + 2$.

En conséquence, $2^{2009} = 2^{3\times669+2} = (2^{3\times669}) \times 2^2$ soit : $2^{2009} = (2^{3\times669}) \times 4$.

Appliquons la congruence modulo 7 aux deux membres de cette dernière égalité :

$2^{2009} \equiv (2^{3\times 669}) \times 4 \ \ (modulo\ 7)$ mais d'après la question précédente : $2^{3\times 669} \equiv 1 \ \ (modulo\ 7)$.

Compte tenu de la compatibilité des relations de congruence avec la multiplication, nous obtenons la congruence : $2^{2009} \ \equiv \ 4 \ \ (modulo\ 7)$

On sait que, modulo *n*, tout entier *a* est congru à un et seul entier *r* vérifiant les inégalités $0 \leq r < n$, entier qui est le reste de la division euclidienne de *a* par *n*.

Vu que 4 est situé entre 0 (au sens large) et 7 (au sens strict), et que 2^{2009} lui est congru modulo 7, il s'agit exactement du reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7.

Le reste de la division euclidienne de 2^{2009} par 7 est l'entier 4.

3.a. Vérifions que $\mathbf{10^3 \ \equiv \ -1 \ \ (modulo\ 7)}$:

$10^3 = 1001 - 1$ et 1001 est un multiple de 7 car $1001 = 7 \times 143$.

Puisque 10^3 et -1 diffèrent d'un multiple de 7, ils sont congrus modulo 7

Nous avons bien : $10^3 \equiv -1 \ \ (modulo\ 7)$

NB. Pour vérifier, nous aurions pu considérer la congruence $10 \ \equiv \ 3 \ \ (modulo\ 7)$ et élever chaque membre de cette congruence à la puissance 3. Nous aurions obtenu : $10^3 \ \equiv \ 3^3 \ \ (modulo\ 7)$.
Or : $3^3 = 27 = 4 \times 7 - 1$, donc $3^3 \equiv -1 \ \ (modulo\ 7)$.
Par transitivité, nous aurions ainsi montré que $10^3 \equiv -1 \ \ (modulo\ 7)$

3.b. Déterminons tous les entiers $\mathbf{N = \overline{a00b}}$ qui sont divisibles par 7 :

Un entier est divisible par 7 si et seulement s'il est congru à 0 modulo 7.

Considérons l'entier $N = a \times 10^3 + b$ et appliquons-lui la congruence modulo 7

D'après la congruence $10^3 \equiv -1 \ \ (modulo\ 7)$ vue à la question précédente, et compte tenu de la compatibilité de la relation de congruence avec l'addition :

$$a \times 10^3 + b \ \equiv b - a \ \ (modulo\ 7)$$

$N = a \times 10^3 + b$ est divisible par 7 si et seulement si $b - a \ \equiv 0 \ (modulo\ 7)$

Cherchons pour quels chiffres *a* (non nul) et *b* cette congruence est vérifiée. Elle l'est si et seulement si l'entier $b - a$ est un multiple de 7.

Nous savons que, en tant que chiffres et *a* étant non nul : $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$.
Donc $-9 \leq b - a \leq 8$.

Les seuls multiples de 7 situés entre -9 et 8 sont -7, 0 et 7. Examinons les divers cas possibles, en respectant les contraintes : $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$

Premier cas : $b - a = -7$ soit $b = a - 7$:
L'entier *a* peut prendre les valeurs 7, 8 ou 9.
Nous obtenons comme couples (a, b) possibles les couples $(7, 0)$, $(8, 1)$ et $(9, 2)$ donc les entiers 7000, 8001 et 9002.

Deuxième cas : $b - a = 0$:
Nous obtenons comme couples (a, b) possibles les couples $(1, 1)$, $(2, 2)$, …, $(9, 9)$et donc les entiers 1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 8008 et 9009.

Troisième cas : $b - a = 7$ soit $b = a + 7$:
L'entier *a* peut prendre les valeurs 1 ou 2.
Nous obtenons comme couples (a, b) possibles les couples $(1, 8)$ et $(2, 9)$ et donc les entiers 1008 et 2009.

Nous obtenons 14 entiers *N* convenables, ce sont les entiers 7000, 8001, 9002, 1001, 2002, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 8008, 9009, 1008 et 2009.

NB. Cette question aurait pu être traitée à l'aide d'un algorithme Python explorant la totalité des entiers qui s'écrivent $N = \overline{a00b}$ et ne retenant que ceux qui sont divisibles par 7. Cet algorithme trouve lui aussi nos mêmes 14 entiers, ce qui valide notre réponse.

```
>>> def divparsept():
        for a in range(1,10):
                for b in range(0,10):
                        n=a*10**3+b
                        if n%7==0:
                                print(n)
```

```
>>> divparsept()
1001
1008
2002
2009
3003
4004
5005
6006
7000
7007
8001
8008
9002
9009
```