Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Arithmétique, Synthèse 22

Correction

En préalable à cet exercice, rappelons les diverses façons d'exprimer la divisibilité d'un nombre entier par un autre.

Soit *m* un entier relatif quelconque et *n* un entier relatif non nul.
Les énoncés suivants, exprimant la divisibilité de *m* par *n*, sont équivalents :

- *n* divise *m*
- *m* est un multiple de *n*
- Il existe un entier relatif *k* tel que : $m = k \times n$
- $m \equiv 0 \ [n]$ (*m* est congru à 0 modulo *n*)

Partie A

1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrons le théorème de Gauss :

Considérons les deux hypothèses figurant dans l'énoncé du théorème de Gauss.

H1 : L'entier relatif *a* divise le produit *bc*.
H2 : Les entiers relatifs *a* et *b* sont des entiers premiers entre eux.

Selon H1, *a* divise *bc* donc il existe un entier relatif *k* tel que : $bc = ka$. **(1)**

Selon H2, *a* et *b* sont des entiers relatifs premiers entre eux. Utilisons le théorème de Bézout pour exploiter cette hypothèse : *a* et *b* étant premiers entre eux, il existe un couple (*u, v*) d'entiers relatifs tels que $ua + bv = 1$. **(2)**

Multiplions par *c* les deux membres de la relation **(2)** : $c \times (ua + bv) = c$
Distribuons : $c \times (ua + bv) = (cu) \times a + (bc) \times v = c$.

En utilisant **(1),** remplaçons *bc* par *ka* dans cette relation : $(cu) \times a + (ka) \times v = c$.

Associons autrement les nombres en jeu : $(cu) \times a + (kv) \times a = c$.

Nous obtenons : $(cu + kv) \times a = c$. Il existe un entier relatif *K*, l'entier : $K = cu + kv$, tel que $c = Ka$. De ce fait, *a* divise *c*. Le théorème de Gauss est démontré :

Si l'entier *a* divise le produit *bc* et s'il est premier avec *b*, alors *a* divise *c*

2. Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Montrons que si $a \equiv 0\ [p]$ et si $a \equiv 0\ [q]$ alors $a \equiv 0\ [pq]$:

D'après le rappel que nous avons fait sur la notion de divisibilité, la congruence $a \equiv 0\ [p]$ signifie que p divise a ou, aussi bien, qu'il existe un entier k tel que : $a = kp$.

La congruence $a \equiv 0\ [q]$ signifie que q divise a. Nous pouvons en déduire, vu la relation $a = kp$ que nous venons d'écrire, que q divise kp.

Or, par hypothèse, p et q sont premiers entre eux. Les deux hypothèses du théorème de Gauss sont vérifiées :
Puisque q divise kp et qu'il est premier avec p, il divise k. Il existe donc un entier k' tel que $k = k'q$.

Nous pouvons écrire : $a = kp = (k'q)p = k'(pq)$

L'existence de cet entier k' caractérise le fait que pq divise a ou, aussi bien, que $a \equiv 0\ [pq]$. Résumons :

Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux.
Si $a \equiv 0\ [p]$ et si $a \equiv 0\ [q]$ alors $a \equiv 0\ [pq]$

NB. Si $a \equiv 0\ [pq]$, alors a est à la fois un multiple de p et un multiple de q et vérifie les deux congruences $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$ quels que soient les entiers naturels p et q. Il n'y a *équivalence* que si les entiers p et q sont premiers entre eux.

Partie B

L'ensemble $\mathbb{S}$ est l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant simultanément : $\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ \ [5] \end{cases}$

1. Recherchons un élément de $\mathbb{S}$:

1.a. Justifions l'existence d'un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $17u + 5v = 1$:

Nous proposons deux façons de justifier cette existence, soit en utilisant le théorème de Bézout, soit en exhibant explicitement un couple d'entiers répondant à la question. Au lecteur de faire de faire son choix. La deuxième méthode a l'avantage d'amorcer une résolution de **1.c**.

Utilisation du théorème de Bézout :
L'entier 5 est un nombre premier. Il est premier avec tout nombre qu'il ne divise pas, en particulier avec 17 : les entiers 5 et 17 sont des entiers premiers entre eux. Nous pouvons appliquer le théorème de Bézout.

D'après le théorème de Bézout, puisque 5 et 17 sont des entiers premiers entre eux, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $5u + 17v = 1$

Proposition d'un exemple explicite d'un couple (u, v) répondant à la question :

Remarquons que 2×17 = 34, un multiple de 5 diminué de 1. Nous pouvons écrire :
$17 \times (-2) + 5 \times 7 = -34 + 35 = 1$, le couple $(-2,\ 7)$ vérifie la relation $7u + 5v = 1$.

Il existe au moins un couple vérifiant la relation $17u + 5v = 1$.
Le couple $(u, v) = (-2, 7)$ est un exemple d'un tel couple

NB. En remarquant que 3×17 = 51, nous aurions obtenu $17 \times 3 + 5 \times (-10) = 51 - 50 = 1 = 1$, le couple $(3, -10)$ est lui aussi un exemple explicite de couple répondant à la question.

1.b. Montrons que l'entier relatif $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ appartient à $\mathbb{S}$:

Par hypothèse, le couple (*u, v*) d'entiers relatifs en jeu vérifie la relation : $17u + 5v = 1$.
Par conséquent, $17u$ est un multiple de 5 augmenté de 1 et $5v$ est un multiple de 17 augmenté de 1, c'est-à-dire que nous avons les deux congruences : $17u \equiv 1\ [5]$ et $5v \equiv 1\ [17]$.

Appliquons une congruence modulo 17 puis une congruence modulo 5 à l'entier n_0 :

- Modulo 17, nous avons : $n_0 \equiv 9 \times 5v \quad [17]$ donc $n_0 \equiv 9 \quad [17]$
- Modulo 5, nous avons : $n_0 \equiv 3 \times 17u \quad [5]$ donc $n_0 \equiv 3 \quad [5]$

L'entier n_0 vérifie simultanément les congruences $n_0 \equiv 9 \quad [17]$ et $n_0 \equiv 3 \quad [5]$, il appartient à $\mathbb{S}$.

1.c. Donnons un exemple d'un tel entier $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$:

Utilisons l'exemple de couple appartenant à $\mathbb{S}$ que nous avons proposé dans notre deuxième méthode de résolution de la **question 1.a**, à savoir le couple $(-2,\ 7)$.

L'entier n_0 associé au couple $(-2,\ 7)$ est : $n_0 = 3 \times 17 \times (-2) + 9 \times 5 \times 7 = -102 + 315 = 213$.

On vérifie qu'en effet : $213 = 42 \times 5 + 3$ et $213 = 12 \times 17 + 9$, l'entier 213 est congru à 3 modulo 5 et à 9 modulo 17.

Le nombre 213 est un exemple d'élément de $\mathbb{S}$.

L'entier associé au couple $(3, -10)$ est : $n_0 = 3 \times 17 \times 3 + 9 \times 5 \times (-10) = 153 - 450 = -297$.
Pareillement, $-297 = (-60) \times 5 + 3$ *et* $-297 = (-18) \times 17 + 9$, *l'entier* -297 *est congru à* 3 *modulo* 5 *et à* 9 *modulo* 17, *c'est un autre exemple d'élément de* $\mathbb{S}$.

2. Caractérisons les éléments de $\mathbb{S}$:

Dans cette question, n_0 désigne un élément particulier de $\mathbb{S}$. Dans notre corrigé, il s'agit de 213 ou bien de -297, selon l'exemple proposé en 1.c.

2.a. Montrons que si *n* appartient à $\mathbb{S}$, alors $\boldsymbol{n - n_0 \equiv 0 \ [85]}$:

Un nombre entier appartenant à $\mathbb{S}$ est un nombre qui est à la fois congru à 9 modulo 17 et congru à 3 modulo 5.

Soit *n* un élément de $\mathbb{S}$. Cet entier *n* vérifie simultanément les deux congruences $\begin{cases} n \equiv 9 \ [17] \\ n \equiv 3 \ [5] \end{cases}$.

Mais n_0 étant un élément particulier de $\mathbb{S}$, nous avons aussi $\begin{cases} n_0 \equiv 9 \ [17] \\ n_0 \equiv 3 \ [5] \end{cases}$.

Modulo 17 nous avons $\begin{cases} n \equiv 9 \ [17] \\ n_0 \equiv 9 \ [17] \end{cases}$ et modulo 5 nous avons $\begin{cases} n \equiv 3 \ [5] \\ n_0 \equiv 3 \ [5] \end{cases}$.

Nous savons que la relation de congruence est compatible avec l'addition, nous pouvons ajouter ou retrancher membre à membre deux congruences de même modulo.

- Par soustraction membre à membre des deux congruences modulo 17 : $n - n_0 \equiv 0 \ [17]$.
- Par soustraction membre à membre des deux congruences modulo 5 : $n - n_0 \equiv 0 \ [5]$.

Or, les entiers 5 et 17 sont premiers entre eux. Nous pouvons appliquer avec eux le résultat de la **question A.2** : Les deux congruences : $n - n_0 \equiv 0 \ [17]$ et $n - n_0 \equiv 0 \ [5]$ étant simultanément vérifiées, elles impliquent la congruence : $n - n_0 \equiv 0 \ [5 \times 17]$.

Le produit de 5 et 17 étant égal à 85, nous pouvons conclure :

Si *n* appartient à $\mathbb{S}$, alors $n - n_0 \equiv 0 \ [85]$

2.b. Montrons que *n* appartient à $\mathbb{S}$ si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{n = 43 + 85k}$:

L'entier 43 est tel que : $43 = 8 \times 5 + 3 = 2 \times 17 + 9$, il est congru à 3 modulo 5 et à 9 modulo 17, il s'agit bien d'un élément particulier n_0 appartenant à $\mathbb{S}$.

D'après la question précédente, en utilisant 43 comme élément particulier de $\mathbb{S}$, si *n* appartient à $\mathbb{S}$, alors $n - 43 \equiv 0 \ [85]$

Par définition de la congruence modulo 85, si les deux entiers *n* et 43 sont congrus modulo 85, ils diffèrent d'un multiple de 85, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif *k* tel que $n = 43 + 85k$.

NB. Nous avions proposé 213. Remarquons que $213 = 2 \times 85 + 43$, les entiers 213 et 43 sont congrus modulo 85, indifféremment nous pouvons utiliser l'un ou l'autre en tant qu'élément particulier de $\mathbb{S}$.

La **question B.2.a** ne nous a demandé qu'une implication directe. Pour le moment, nous avons établi que si *n* appartient à $\mathbb{S}$, alors il existe un entier relatif *k* tel que $n = 43 + 85k$. Nous sommes tenus de nous assurer de la réciproque.

Réciproquement, s'il existe un entier relatif k tel que $n = 43 + 85k$ alors $n - 43$, en tant que multiple de 85, est à la fois multiple de 17 et multiple de 5. L'entier *n* est congru à 43 à la fois modulo 17 et modulo 5 donc *n* est congru à 9 modulo 17 et à 3 modulo 5 : *n* appartient à $\mathbb{S}$.

Concluons :

Etant donné un entier relatif *n*, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
n appartient à $\mathbb{S}$
n vérifie $n \equiv 43\ [85]$
Il existe un entier relatif *k* tel que $n = 43 + 85k$.

Les éléments de $\mathbb{S}$ sont ceux de la suite : {…, −127, −42, 43, 128, 213, 298, 383, 468, 553, …}

3. Appliquons les résultats obtenus pour aider Zoé à compter ses jetons :

Selon l'énoncé, ce nombre de jetons est à la fois un multiple de 17 augmenté de 9 et un multiple de 5 augmenté de 3. Si *n* est ce nombre de jetons, *n* est congru à 9 modulo 17 et à 3 modulo 5.

Il s'agit d'un élément de $\mathbb{S}$, c'est-à-dire d'un entier relatif de la forme $n = 43 + 85k$.

Zoé sait que ce nombre de jetons est compris entre 300 et 400, or il n'y a qu'un seul entier de cette forme entre 300 et 400, c'est l'entier 383.

Zoé a 383 jetons.