

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Expertes Terminale

Arithmétique



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

## ÉNONCÉ

## Partie A:

On rappelle ci-dessous le théorème de **BÉZOUT** et le théorème de **GAUSS**.

Théorème de **BÉZOUT**:

Deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple  $(u, v)$  d'entiers relatifs vérifiant  $au + bv = 1$ .

Théorème de **GAUSS**:

Soient  $a, b, c$  des entiers relatifs.

Si  $a$  divise le produit  $bc$  et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a$  divise  $c$ .

1. En utilisant le théorème de **BÉZOUT**, démontrer le théorème de **GAUSS**.
2. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels tels que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

Déduire du théorème de **GAUSS** que, si  $a$  est un entier relatif, tel que:

$$a \equiv 0 [p] \text{ et } a \equiv 0 [q], \text{ alors } a \equiv 0 [pq].$$

**Partie B:**

On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}$  des entiers relatifs  $n$  vérifiant le système:

$$\begin{cases} n \equiv 9 [17] \\ n \equiv 3 [5] \end{cases}.$$

1. Recherche d'un élément de  $\mathcal{S}$ :

On désigne par  $(u, v)$  un couple d'entiers relatifs tel que  $17u + 5v = 1$ .

- Justifier l'existence d'un tel couple  $(u, v)$ .
- On pose:  $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ . Démontrer que  $n_0$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
- Donner un exemple d'entier  $n_0$  appartenant à  $\mathcal{S}$ .

2. Caractérisation des éléments de  $\mathcal{S}$ :

- Soit  $n$  un entier relatif appartenant à  $\mathcal{S}$ . Démontrer que  $n - n_0 \equiv 0 [85]$ .
- En déduire qu'un entier relatif  $n$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $n$  peut s'écrire sous la forme  $n = 43 + 85k$  où  $k$  est un entier relatif.

3. Application:

Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.

Combien a-t-elle de jetons?