Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \ \ (E).$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\ ;y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1)……………………………………
                      (2)……………………………………
                      Alors   Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin.
```

2.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0\ .$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n; y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{-13}{2} x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{-35}{2} x_n + 8y_n \end{cases} .$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

b. Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1} , est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $P^{-1}\,M\,P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

b. Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = P\,D^n P^{-1}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et de y_n en fonction de n.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.