Maths Expertes
Terminale

Arithmétique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ARITHMÉTIQUE, SYNTHÈSE 15

CORRECTION

Partie A: Conjectures

1. Déterminons les formules qui ont été entrées dans les cellules B_3 et C_3:

Les formules sont:

- En B_3: on entre << $= 2 * B_2 + 3 * C_2$ >>.
- En C_3: on entre << $= 2 * B_2 + C_2$ >>.

2. Conjecturons la valeur de PGCD $(U_n ; V_n)$:

En lisant la copie d'écran, nous constatons que:

PGCD $(1 ; 1) =$ PGCD $(5 ; 3) =$ PGCD $(19 ; 13) =$ PGCD $(77 ; 51) =$ PGCD $(307 ; 805)$

$= 1$.

Dans ces conditions, la conjecture que nous pouvons émettre sur la valeur du PGCD $(U_n ; V_n)$ est:

" on pourrait, a priori, penser que: **PGCD $(U_n ; V_n) = 1$** ".

3. Qu'en pensons nous ?

Notons que: $\frac{U_{10}}{V_{10}} \approx 1,50$, $\frac{U_{11}}{V_{11}} \approx 1,50$, $\frac{U_{12}}{V_{12}} \approx 1,50$ et $\frac{U_{13}}{V_{13}} \approx 1,50$.

Dans ces conditions, la conjecture émise par Flore selon laquelle " **la suite $\left(\frac{U_n}{V_n} \right)$ converge** " semble, a priori, bonne.

De plus, la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ paraît converger vers: " 1, 50 ".

Au total: **oui**, la conjecture émise par Flore est, a priori, valide.

Partie B: Étude arithmétique

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$ ".

Initialisation: • $2U_0 - 3V_0 = (-1)^{0+1}$?

oui car: $2U_0 - 3V_0 = 2 \times 1 - 3 \times 1 \Rightarrow 2U_0 - 3V_0 = -1$,

et $(-1)^{0+1} = -1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$

et montrons qu'alors: $2U_{n+1} - 3V_{n+1} = (-1)^{n+2}$.

Supposons: $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

Préalablement, nous avons:

$$\begin{cases} 2U_n + 3V_n = U_{n+1} \\ 2U_n + V_n = V_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_n = \frac{1}{4}(-U_{n+1} + 3V_{n+1}) \\ V_n = \frac{1}{2}(U_{n+1} - V_{n+1}) \end{cases}.$$

D'où: $(1) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4}(-U_{n+1} + 3V_{n+1})\right) - 3\left(\frac{1}{2}(U_{n+1} - V_{n+1})\right) = (-1)^{n+1}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}U_{n+1} + \frac{3}{2}V_{n+1} - \frac{3}{2}U_{n+1} + \frac{3}{2}V_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow -2U_{n+1} + 3V_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2U_{n+1} - 3V_{n+1}}{(-1)} = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2U_{n+1} - 3V_{n+1} = (-1)^{n+1} \times (-1)$$

$$\Rightarrow 2U_{n+1} - 3V_{n+1} = (-1)^{n+2}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$.

2. Déduisons-en PGCD (U_n ; V_n):

Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de **BÉZOUT**.

D'après ce théorème: " Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux ssi il existe deux entiers u et v tels que: $a \cdot u + b \cdot v = 1$ ".

D'après la question précédente, nous avons: $2U_n - 3V_n = (-1)^{n+1}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow (-1)^{n+1} \times [2U_n - 3V_n] = (-1)^{n+1} \times [(-1)^{n+1}]$

$\Leftrightarrow U_n \times u + V_n \times v = 1$, avec: $u = (-1)^{n+1} \times 2$ et $v = (-1)^{n+1} \times (-3)$.

Comme U_n et V_n sont deux entiers relatifs non nuls, nous pouvons affirmer qu'ils sont premiers entre eux car: il existe bien deux entiers relatifs $u\ (= (-1)^{n+1} \times 2)$ et $v\ (= (-1)^{n+1} \times (-3))$ tels que $U_n \times u + V_n \times v = 1$.

Au total: pour tout entier naturel n, U_n et V_n sont premiers entre eux et nous avons donc PGCD $(U_n ; V_n) = 1$.

Partie C: Étude matricielle

1. a. Montrons que $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P:

La matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P ssi:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Au total: la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de P.

1. b. Calculons U_n et V_n:

Ici: $X_n = Q_n\, P^{-1}\, X_0 \iff \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{2U_0 - 3V_0}{5} \\ \dfrac{U_0 + V_0}{5} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(car: $U_0 = 1$ et $V_0 = 1$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}(-1)^n + \frac{6}{5}2^n \\ -\frac{1}{5}(-1)^{n+1} + \frac{2}{5}2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Au total, nous avons bien:

$$\begin{cases} U_n = \frac{1}{5}\left(-(-1)^n + 6 \times 2^n\right) \\ V_n = \frac{1}{5}\left(-(-1)^{n+1} + 2 \times 2^{2n+1}\right) \end{cases} \text{ ou encore: } \begin{cases} U_n = \frac{1}{5}\left((-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}\right) \\ V_n = \frac{1}{5}\left((-1)^n + 2^{2n+2}\right) \end{cases}.$$

2. a. Calculons $\frac{U_n}{V_n}$, pour tout entier naturel n:

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$\frac{U_n}{V_n} = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2^{2n+2}}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}, \text{ car: } 2^{2n+2} = 2 \times 2^{2n+1}.$$

Ainsi: nous obtenons bien le rapport désiré, pour tout entier naturel n.

2. b. Déduisons la limite de la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{3}{2}, \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = 0.$$

Au total, la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ est convergente et converge vers la limite finie $\frac{3}{2}$.

Cela confirme l'idée de Flore: " la suite $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$ converge ".